PREFEITURA DA CIDADE DO RIO DE JANEIRO
SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO
SUBSECRETARIA DE ENSINO
COORDENADORIA DE EDUCAÇÃO
GERÊNCIA DE EDUCAÇÃO DE JOVENS E ADULTOS

PEJA II

MATEMÁTICA
BLOCO II

UNIDADE DE PROGRESSÃO II

Prefeito da Cidade do Rio de Janeiro

Eduardo Paes

Secretaria Municipal de Educação

Claudia Maria Costin

Subsecretaria de Ensino

Regina Helena Diniz Bomeny

Coordenadoria de Educação

Maria de Nazareth Machado Barros

Gerência de Educação de Jovens e Adultos

Maria Luiza Lixa de Mendonça

Equipe da Gerência de Educação de Jovens e Adultos

Adriana Araújo da Silva
Fátima Luzia Valente
Hérica Ferreira dos Santos Marinate
Katia Regina das Chagas Moura
Lavínia Nogueira de Albuquerque
Lucia Silveira Cavalcante de Oliveira
Luzanira Scalercio
Margarete de Oliveira Nascimento
Maria das Mercês Navarro Vasconcellos
Maria Helena Neves Pereira de Souza
Márcia Santos Xavier
Núbia Vergetti

Organizadores do Material de Matemática

Coraci Freitas Ferreira
José Rubem Filhote
Geraldo Cascardo da Silva
Lilia Maria C. da Silva Gralato
Luciana Getirana de Santana
Maria Ednice F. Rodrigues
Núbia Vergetti
Sandra Maria Jardim S. Pires
Sergio Ferreira Bastos

Organizador e coordenador dos trabalhos

Marcio de Albuquerque Vianna

Telefones: 2273-8941/ 2976-2292

e-mail: gejasme@rioeduca.net

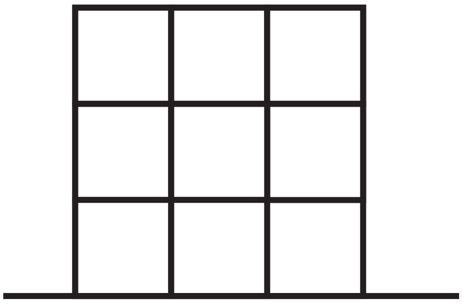
BLOCO II – UP-2
ÁLGEBRA E ARITMÉTICA

Potenciação e Radiciação

Um pouco de história sobre a potenciação e a radiciação

Os conceitos de raiz e potência estão intimamente ligados à geometria, ou seja, observamos que:

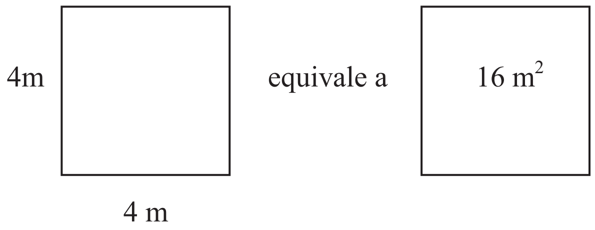
"Os árabes, seguindo os hindus, concebiam o 25 como uma "árvore que crescia a partir do número 5, sua raiz." (Baumgart, p. 78)



Nota: Observando a figura, temos o nove "crescendo" a partir de sua base (raiz) que é três... o que normalmente dizemos "raiz quadrada de nove" seria: "raiz **do quadrado** nove", ou seja, **"a base do quadrado 9".**

Nesse sentido, percebemos que ao expressarmos $\mathbf{3^2}$ **(três ao quadrado)** podemos nos referir como **um quadrado de lado 3**, ou seja, onde a sua base mede 3. Só que, ao multiplicarmos 3 por 3 (que é o 3 ao quadrado) temos 9 unidades de superfície.

Exemplo: Se tivermos um terreno quadrado medindo ***4 metros*** de lado, teríamos uma área de um terreno de ***4 metros quadrados***. Pois o lado ***4 foi elevado ao quadrado***.



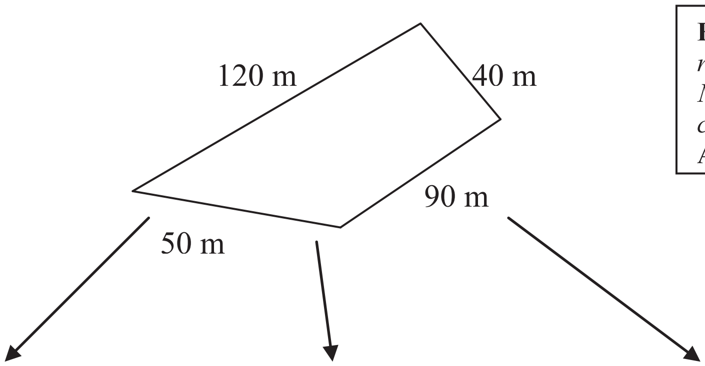
Pois o 4 foi elevado "ao quadrado" (4^2)
onde <u>base vezes altura:</u> 4 x 4 = 16.
Compreendeu?

Curiosidade: Historicamente para os hindus, se pudéssemos "apoiar um lado desse terreno quadrado no chão" essa seria a sua raiz, ou seja, a sua base.

Medidas de terra

Entre os saberes tradicionais dos agricultores, existem aqueles relacionados à medição da terra. Num trabalho desenvolvido com educandos pertencentes ao Movimento dos Sem Terra (MST), a pesquisadora Gelsa Knijnik discutiu alguns métodos para *cubar a terra* (expressão usada pelos agricultores da região a pesar de não se tratar de volume e sim de área). Para uma mesma superfície da terra, representada pelo polígono abaixo, apareceram alguns métodos diferentes de calcular a área, o Método do Adão, o Método do Jorge e um outro de um desconhecido.

Fonte: livro "*Exclusão e resistência: Educação Matemática e legitimidade cultural*" – Gelsa Knijnik, Artes Médicas. 1996.



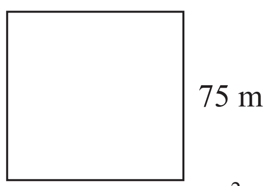
Método do Adão

105 m

$105 \times 45 = 4725\ m^2$

Método do Jorge

75 m



$75 \times 75 = 5625\ m^2$

Método do "desconhecido"

$$\frac{210 \times 40}{2} = 4200\ m^2$$

🗣 Atividade:

1) **Responda:**

a. Quais são as diferenças entre os métodos?

b. Tente representar através de linguagem matemática o processo utilizado em cada um dos métodos.

c. Qual o método que você considera "mais legítimo" na sociedade contemporânea e/ou para esse grupo (em específico) de trabalhadores? Ou seja, qual é o mais preciso, mais eficiente, mais útil, etc.? Justifique.

d. Se você tiver outro método para esse problema, explique para o seu professor como você faria para resolver esse cálculo de área.

e. Nessas medidas **está presente o conceito de radiciação e potenciação**? Onde especificamente? Será que os trabalhadores do movimento conhecem estes conceitos? **Troque ideias com o seu professor...**

2) **Responda :**

a. Qual a operação inversa da adição?___________________________________

b. Qual a operação inversa da subtração?_______________________________

c. Qual a operação inversa da multiplicação?____________________________

d. Qual a operação inversa da divisão?_________________________________

Continuando o raciocínio...

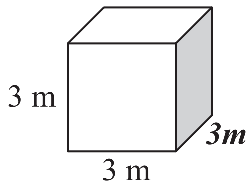
e. Qual a operação inversa da potenciação?______________________________

f. Qual a operação inversa da radiciação?_______________________________

Consequentemente, o mesmo ocorre para a **raiz cúbica** e o número **elevado ao cubo**:

⇒ *Qual a **raiz cúbica** de um cubo de 27 m^3 ?*

É a sua aresta (ou raiz) que mede 3 m pois o ***cubo possui 3 dimensões***:



Esse cubo possui **3m de altura**, por **3m de largura** por **3m de profundidade**.
Ele possui 3m x 3m x 3m = $27m^3$
Ou $3^3 = 27\ m^3$ **de volume**

Para refletir: **como não há representação gráfica para figuras de números elevados a *quarta potência*, ou a *quinta potência*, etc., utilizamos o mesmo critério de inversão entre a potência e a raiz. Ou seja, o inverso da raiz quarta é o número elevado a quarta potência, e assim por diante.**

Atividade:

1) Quanto é 5^4 ?________________________________

2) Quanto é $\sqrt[4]{625}$? Ou seja, qual é o número que multiplicado por ele mesmo 4 vezes é igual a 625? (Dica: você pode fatorar o número 625 em números primos para facilitar)________________________________

Há alguma semelhança nos resultados? ________________________

O que podemos dizer sobre isso? ________________________

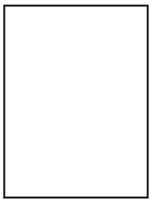
Vocabulário:

Procure o significado de cada uma das palavras a seguir no dicionário:

- Potência
- Raiz
- Radical
- Radiciação

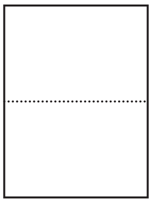
🛠 Atividade

Pegue um pedaço de papel retangular:



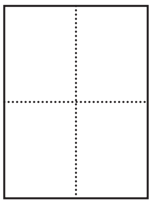
Este pedaço de papel irá representar o número $\mathbf{2^{o}}$ porque ele equivale a um único pedaço de papel (pois $2^{o} = 1$, com zero dobras) onde a base é 2 pois vamos dobrá-lo sempre pela metade, ou seja, dividir por 2.

Dobre-o pela metade *horizontalmente* da seguinte forma:

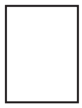


Quantos retângulos foram formados? Dois?
Pois equivale a $\mathbf{2^1}$ que é igual a **2**. Vai ficar assim:

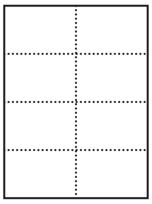
Dobre-o novamente, agora *verticalmente*, pela metade:



Quantos retângulos foram formados? Quatro? Assim:
Pois equivale a $\mathbf{2^2 = 4}$**,** pois dividimos **2** vezes.



Dobre esse último retângulo menor pela metade:



Quantos retângulos teremos? Oito?
Pois $\mathbf{2^3 = 8}$ pois dobramos **3** vezes aquele retângulo menor.
Assim:

Perguntas:

a) Dobrando mais uma vez a folha, quantos retângulos foram formados?___________

b) Isso equivale a qual expoente de base 2?____________________________________

c) Quantos retângulos são formados quando dobramos 5 vezes?_________________

d) Qual é a expressão de base 2 formada para essa situação?____________________

e) Quantos retângulos teríamos para 2^{10} ?____________________________________

Curiosidade: **Por que todo número negativo elevado a um expoente par fica positivo?**

Vejamos: todo número elevado ao quadrado *é ele vezes ele mesmo*:

Ex: $(-3)^2 = (-3).(-3) = +9$

No caso de um número elevado ao cubo temos *é ele vezes ele mesmo 3 vezes.*

Ex: $(-5)^3 = (-5).(-5).(-5) = -125$ (pois o expoente é ímpar, ou seja, não fica positivo)

Elevado a quarta potência, ou a sexta potência ocorre o mesmo:

Experimente:

Atividade: **Resolva as potenciações e verifique se o resultado fica positivo:**

a) $(-2)^4 =$______________

b) $(-3)^6 =$______________

Propriedades das potências

Existem algumas propriedades das potências que podemos utilizar para resolver ou simplificar algumas expressões algébricas:

1ª) Produto ou multiplicação de potências de mesma base:

Repetimos a base e somamos os expoentes:

Ex: $5^4 \, . \, 5^7 = 5^{4+7} = 5^{11}$

2ª) Divisão de potências de mesma base:

Repetimos a base e somamos os expoentes.

Ex: $9^{12} \div 9^7 = 9^{12-7} = 9^5$

$$\frac{7^2}{7^5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \frac{1}{7^3}$$

3ª) Potência da potência:

Repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

Ex: $[(8)^2]^7 = 8^{2x7} = 8^{14}$

4ª) Expoente negativo:

Quando o expoente é negativo invertemos a base e trocamos o sinal do expoente.

Ex: $8^{-5} = \dfrac{8^{-5}}{1} = \dfrac{1}{8^{+5}}$

$8^{3} = \dfrac{8^{3}}{1} = \dfrac{1}{8^{-3}}$

$\dfrac{1}{5^{-3}} = \dfrac{5^{3}}{1} = 5^{3}$

5ª) Expoente fracionado:

Quando o expoente é fracionado invertemos a sua operação: **transformamos a potência em raiz**, pois **é a sua operação inversa**.

Ex:

$8^{1/3} = \sqrt[3]{8} = 2$

$4^{2/5} = \sqrt[5]{4^{2}}$

? Curiosidade: Por que todo número elevado a zero é igual a 1?

Podemos dizer que o zero é o resultado da operação adição de dois números opostos
Ex: 5 + (-5) ou então 5 – 5

Muito bem:

Então podemos escrever 2^0 (dois elevado a zero) da seguinte forma: $\mathbf{2^{5-5}}$, certo? Pois 5 – 5 é igual a zero...

Aplicando a propriedade das potências para a **divisão de potências de mesma base**, temos que:

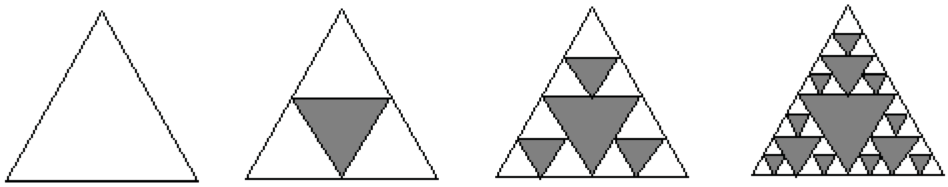
$\dfrac{2^5}{2^5} = 2^{5-5} = 2^0$ como todo número divisível por ele mesmo é igual a 1 temos $\dfrac{2^5}{2^5} = 1$

Logo $2^0 = 1$, compreendeu?

Isso vale para qualquer valor onde o expoente é igual a zero $\dfrac{7^{23}}{7^{23}} = 7^{23-23} = 7^0 = 1$

Curioso não?

Atividade: Observe a seqüência dos *triângulos brancos* abaixo e escreva as potências correspondentes:



Quantos triângulos brancos terá a **quinta** figura? Qual a potência correspondente?

Atividades complementares:

Simplifique as potências aplicando as propriedades:

a) $3^3 \cdot 3^5 =$ ________________________________

b) $4 \cdot 4^2 \cdot 4^5 =$ ________________________________

c) $(-5)^8 \div (-5)^6 =$ ________________________________

d) $[(2^2)^3]^0 =$ ________________________________

e) $15^{-4} =$ ________________________________

f) $9^{1/2} =$ ________________________________

g) $8^{2/6} =$ ________________________________

Propriedades das raízes

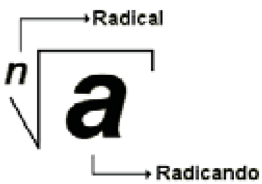
A matéria de radiciação acaba ficando bem mais fácil se você já viu "Potenciação".

Radiciação é o inverso da potenciação. Por exemplo, se elevarmos um número X à quinta potência e depois tirarmos a raiz quinta do resultado, voltaremos ao número X.

Exemplos:

Para acharmos a raiz cúbica de oito ($\sqrt[3]{8}$), devemos nos perguntar qual o número que multiplicado por ele mesmo três vezes resulta 8, ou seja, qual o número que elevado a potência 3 resulta 8? *A resposta é 2, pois* $2^3=2\cdot 2\cdot 2=8$

Nomenclatura:



Para facilitar as coisas, existe um meio de transformarmos uma raiz em uma potência. Assim fica muito mais fácil, pois podemos utilizar as mesmas propriedades de potenciação.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

Curiosidade: A palavra ***raiz*** é uma tradução da expressão em latim ***radix*** que faz analogia a raiz de uma árvore que é a sua base... assim como a base do quadrado... que foi sendo cada vez mais abreviada.

Veja como a expressão ***raiz de 4*** foi sofrendo mutação gráfica ao longo das "centenas" de anos na sua evolução:

radix 4 → rad 4 → r 4 → ґ4 → $\sqrt{4}$

Atividade: Resolva as potências dos radicais

a) $\left(\sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{16}\right)^2$

Atividade: Resolva as divisões dos radicais

a) $\dfrac{\sqrt{36}}{\sqrt{49}}$

b) $\sqrt{\dfrac{81}{9}}$

c) $\sqrt{144} \div \sqrt{169}$

Atividade: Transforme as raízes em potências fracionadas

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{3^4}$

c) $\sqrt[3]{5^2}$

Equações do 1º Grau com duas incógnitas

A equação do 1º grau com duas incógnitas tem infinitas soluções.

Cada solução da equação forma um ***par ordenado de números***.

As soluções de uma equação do 1º grau com duas variáveis podem ser encontradas atribuindo-se valores para uma incógnita e, a seguir, calculando-se o valor da outra incógnita.

Exemplo: Determinar uma solução da equação $3x - 2y = 10$, na qual $y = 7$.

$3x - 2y = 10$
$3x - 2.7 = 10$
$3x - 14 = 10$
$3x = 10 + 14$
$3x = 24$
$x = 24/3$
$x = 8$

Logo, o par (8 ; 7) é uma solução da equação, sempre na forma **(x,y).**

Nota: Se fixarmos o valor de **y**, podemos calcular o valor de **x,** substituindo o **y** pelo valor fixado.

Exemplo: Determinar dois pares ordenados que sejam soluções da equação $4x + y = 2$. Atribuindo valores arbitrários a x e em seguida calcular o valor de y.

$x = 1$	$x = -3$
$4x + y = 2$	$4x + y = 2$
$4.1 + y = 2$	$4.(-3) + y = 2$
$4 + y = 2$	$-12 + y = 2$
$y = 2 - 4$	$y = 2 + 12$
$y = -2$	$y = 14$
(1 ; -2)	(-3 ; 14)

Curiosidade: **por que uma equação do 1º grau com duas incógnitas tem infinitas soluções?**

Nestes casos anteriores, pudemos atribuir valores para ***x*** ou para ***y*** para descobrir o outro valor.

Mas, vamos supor a seguinte situação:

Quais os valores de x e y que satisfaçam a equação **x + y = 0**

Existe somente uma solução?

Não! Podemos ter –2 + 2 = 0 onde x = - 2 e y = 2; ou –7 + 7 = 0 onde x = -7 e y = 7; ou seja temos **INFINITAS** soluções para essa equação.

Sabe por quê?

PORQUE TEMOS UMA ÚNICA SENTENÇA PARA DUAS INCÓGNITAS !!!

É necessário que tenhamos ***pelo menos duas sentenças*** para descobrirmos os valores das duas incógnitas.

Atividade:

Agora deduza os valores de x e y com o uso da segunda sentença

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$$ agora fica mais fácil, não é?

Teremos **somente uma única solução para resolver a situação**, ou seja, têm que ser dois números que somados dêem zero e subtraídos dêem dois... quais são esses números?

Atividades complementares:

1) Determinar pelo menos três pares ordenados que sejam solução da equação 2x – y = 3. Atribuindo valores arbitrários a x e em seguida calculando o valor de y.

2) Determinar uma solução da equação 3x + 5y = 1, na qual y = $\frac{2}{3}$.

🛠 Atividade prática:

Vamos supor: a sua idade é **X** e a idade do seu filho é **Y**. Sabendo-se que a equação **2x – y = 52** relaciona sua idade com a de seu filho, complete a tabela de acordo com os valores **X** e **Y** informados abaixo.

X ⇒ a sua idade	**Y ⇒ a idade do seu filho**	**Situação**
28 anos		
	8 anos	
20 anos		

🖹Como determinar a solução de um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas?

Consideremos a seguinte situação:
Um pão de forma custa **x** reais e um litro de leite custa **y** reais. A diferença entre o preço de um pão e o preço de um litro de leite é 1 real. Flavia comprou um pão e comprou dois litros de leite, gastando ao todo 7 reais. Qual é o preço do pão?

<u>1º passo</u>
Traduzir as condições do problema em equações
X = preço do pão

Y = preço do litro de leite

Assim, podemos traduzir as condições do problema nas seguintes equações.

x – y = e x + 2y = 7

Como as duas equações se referem ao mesmo fato, elas são ligadas pelo conectivo (e) e, em Matemática, dizemos que formam um ***sistema de duas equações*** do 1° grau com duas incógnitas, x e y, e indicamos por:

$$\begin{cases} x - y = 6 \\ x + 2y = 15 \end{cases}$$

2º passo

Como a equação mais simples do sistema é a primeira, vamos determinar o valor de uma incógnita nesta equação.

$x - y = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1 + y$

3º passo

Na outra equação, vamos substituir a incógnita x por **1 + y**

$\mathbf{x} + 2y = 7$

$1 + y + 2y = 7 \quad \rightarrow$ equação do 1º grau na incógnita y

$3y = 7-1$

$3y = 6$

$y = \frac{9}{3}$

$y = 2$

4º passo

Substituindo o valor de y em $x - y = 1$, determinamos o valor da incógnita x:

$x - 2 = 1$

$x = 1+2$

$x = 3$

Logo, a solução do sistema é dada pelo par ordenado (3 ; 2)

Ou seja, o pão custa R$ 3,00 e o litro de leite custa R$ 2,00

Resumindo:

O método de substituição para resolução de sistemas do 1º grau com duas variáveis consiste em três passos:
1º) isolar x ou y em uma das equações do sistema.
2º) substituir x ou y na outra equação pelo valor encontrado no primeiro passo para obter uma equação com uma variável.
3º) substituir o valor numérico encontrado para **x** ou para **y** no segundo passo em uma das equações do sistema para obter o valor da outra incógnita

Dica: Esse método de solução é chamado **método da substituição**. como você já conhece um sistema de equações do primeiro grau, pesquise junto ao seu professor a resolução de sistemas pelos **processos de adição e comparação**.

Atividades complementares: **Resolver os seguintes sistemas:**

a) $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = -1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x + 3y = 29 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 4x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 7x - y = 20 \\ x + 8y = 11 \end{cases}$

Atividades complementares:

Vamos pensar um pouco sobre os problemas abaixo?

1) A soma das idades de dois irmãos é igual a 28 anos e a diferença 12 anos. Quais são as idades?

2) No estacionamento da escola estão 75 veículos, entre carros e bicicletas. Sabendo-se que, ao todo, foram contadas 210 rodas, quantas bicicletas estão estacionadas?

3) A diferença entre dois números naturais é 40. O quociente da divisão do maior pelo menor é igual a 6 e o resto é 5. Quais são os números?

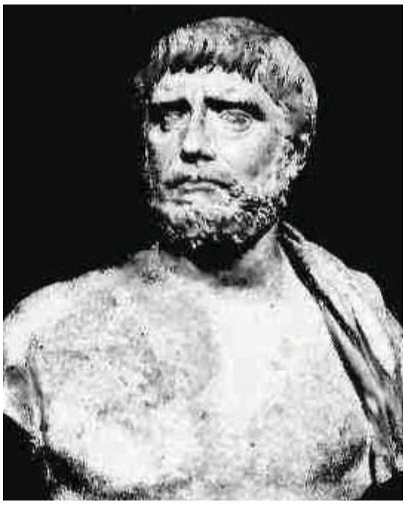
4) Em uma fazenda, o número de gansos e de cavalos é 55. Sabendo-se que o número de pés dos cavalos excede o número de pés dos gansos em 100, quantos são os cavalos?

UP-2: GEOMETRIA

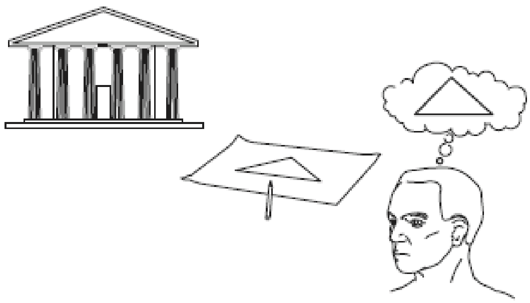
Teorema de Tales

Um pouco de História

Quem foi Tales e o que ele fez?

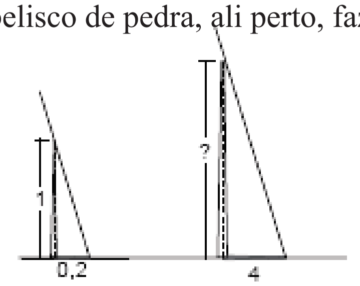


A ciência, tão fundamental na era antiga, teve seu início por volta do ano 600 a.C. na cidade de Mileto, Grécia, especialmente com Tales de Mileto. Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C. Não se sabe ao certo em que ano ele morreu. Foi Tales quem primeiro chamou a atenção para o aspecto abstrato dos objetos geométricos, ao considerar um triângulo ou uma pirâmide, por exemplo, não como coisas concretas, feitas de madeira ou pedra, mas como objetos do nosso pensamento. Uma de suas descobertas no campo filosófico foi a de que "não apenas os homens estão sujeitos a leis, mas também à Natureza". E apontando para a sombra dos degraus de um estádio desportivo, teria dito: "Os ângulos dos degraus obedecem a uma lei: são todos iguais". (Depois veremos esse exemplo com maiores detalhes.) Assim, uma das ideias deste grande filósofo e matemático é esta: uma lei que se aplique a triângulos vale tanto para triângulos de construção (por exemplo, a construção de uma casa) como para aqueles desenhados (a planta da casa) e mesmo para triângulos... "imaginários", como ele se referia aos triângulos abstratos, os do nosso pensamento, aqueles com que de fato lida a geometria.



Outra importantíssima característica do pensamento de Tales é que estas leis matemáticas - ou teoremas, como são chamadas - devem ser provadas (ou demonstradas) por um raciocínio lógico. (E não apenas explicadas com argumentos religiosos ou míticos, como se fazia até então em lugares antes mais desenvolvidos, como o Egito e a Babilônia.) Desse modo, Tales procurava sempre demonstrar cada uma de suas afirmações novas, baseando-se em outras afirmações já demonstradas, outros teoremas, formando assim cadeias de raciocínio.

Nesta aula você terá a oportunidade de redescobrir alguns desses teoremas bastante interessantes e úteis na vida prática que são atribuídos a Tales, especialmente aquele que ficou conhecido com seu nome: **o Teorema de Tales**. Você ficará surpreso ao ver quantas aplicações diferentes existem destes teoremas: desde o cálculo da altura de prédios e outras distâncias inacessíveis até o modo certo de aumentar a feijoada! Como veremos, tudo isso trata de proporcionalidade de números (ou regra de três). Na realidade, o Teorema de Tales é “a figura da regra de três”. Mas... cada coisa a seu tempo! Conta-se que, numa viagem ao Egito, Tales foi desafiado pelos sacerdotes egípcios a explicar como “adivinhara” a altura de uma das pirâmides. Os sacerdotes acreditavam que essa informação era sagrada e havia sido inadvertidamente fornecida a ele, que, por esse motivo deveria ser preso. Tales explicou seu raciocínio exemplificando-o com o cálculo da altura de um obelisco cuja sombra era mais fácil de ser medida. Aqui está o problema para você tentar responder: Em certo momento do dia, uma vareta de 1 m, espetada verticalmente no chão, faz uma sombra que mede 20 cm. No mesmo instante, um obelisco de pedra, ali perto, faz uma sombra de 4 m. Qual a altura do obelisco?

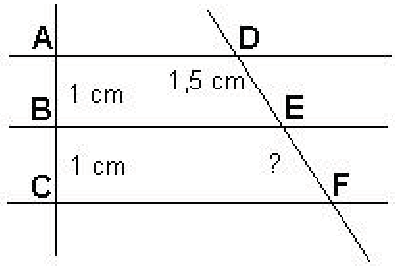


Atenção: como o Sol está muito longe de nós, podemos considerar seus raios como retas paralelas.

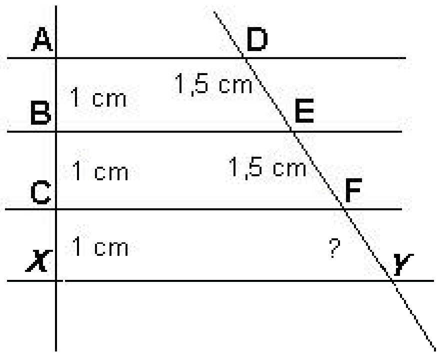
1) Segmentos proporcionais

Vimos o que acontece com os ângulos quando duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal: eles são transportados de uma das retas paralelas à outra. Vejamos o que ocorre quando não duas mas três retas são paralelas: como você já sabe, os ângulos formados em todas as três são iguais. Mas não apenas isso; agora também formam-se segmentos.

Na figura a seguir, eles estão representados por AB e BC. Algo muito interessante aconteceu. Se AB e BC forem iguais (no exemplo AB = BC = 1 cm) e traçarmos qualquer outra reta transversal (incline essa reta de forma que a distância entre as paralelas fique 1,5 cm), então os dois novos segmentos DE e EF. Meça EF e compare-o com DE, que neste exemplo mede 1,5 cm. Quanto dá essa medida?

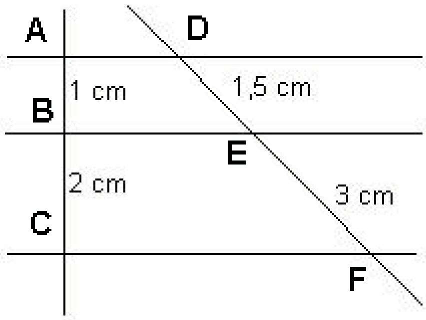


DE e EF também serão iguais isto é, DE = 1,5 = EF. Da mesma forma, se traçássemos uma quarta reta paralela passando pelo ponto D tal que também CD = 1, então quanto mediria FY? É claro que, pelo mesmo motivo, DE = 1,5 = EF = FY.



Resumindo: Podemos enunciar isto da seguinte maneira: quando um feixe (isto é, um conjunto de três ou mais retas) de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, se os segmentos numa das retas forem iguais, (no exemplo, AB=BC=CX=1), então os segmentos na outra reta também o serão (DE = EF = FY = 1,5).

Mas, e se os segmentos na primeira reta não forem iguais? Como no exemplo acima, onde AB = 1 cm e BD = 2 cm o que podemos dizer sobre A'B' e B'D' (além do fato de que também não são iguais)? Veja a figura abaixo: se A ' B ' = 3 cm, temos B'D' = 6 cm. Olhe para estes quatro números da figura: 1; 2; 1,5 e 3. Tomados nesta ordem, formam duas frações iguais:



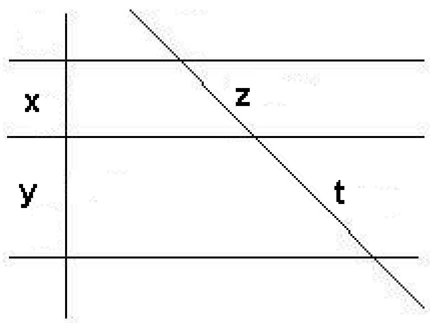
Dizemos que estes quatro números são números proporcionais ou seja, **“1 está para 2, assim como 1,5 está para 3**. Assim, os segmentos que têm estas medidas, na figura representados respectivamente por AB = 1 cm, BC = 2 cm, DE = 1,5 cm e EF = 3 cm, são segmentos proporcionais. De um modo geral, definimos: AB e BC são segmentos proporcionais a DE e EF (nesta ordem), se

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

O Teorema de Tales

O Teorema de Tales fala exatamente isso:

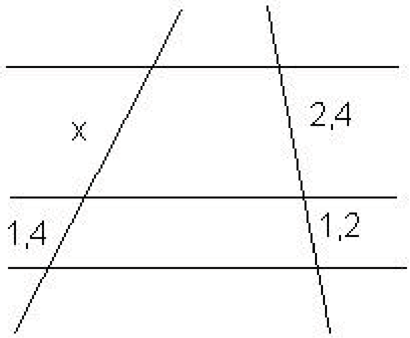
Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das retas transversais são proporcionais aos segmentos determinados na outra.



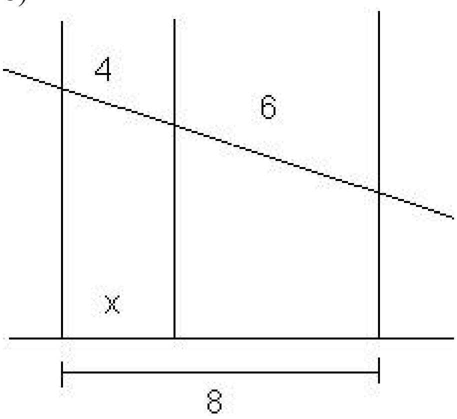
ou seja $\frac{x}{y} = \frac{z}{t}$

✏ **Atividades:** Calcule os valores dos segmentos ***x*** nas figuras abaixo:

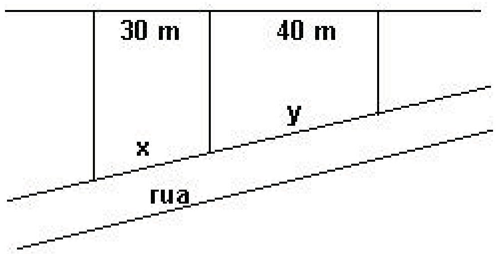
a)



b)

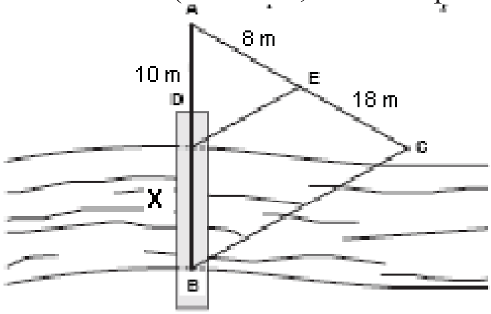


✏ **Atividade:** A planta abaixo mostra as medidas de dois terrenos. Calcule as medidas de suas frentes, sabendo que as laterais são paralelas e que a medida de AB é 90 metros.

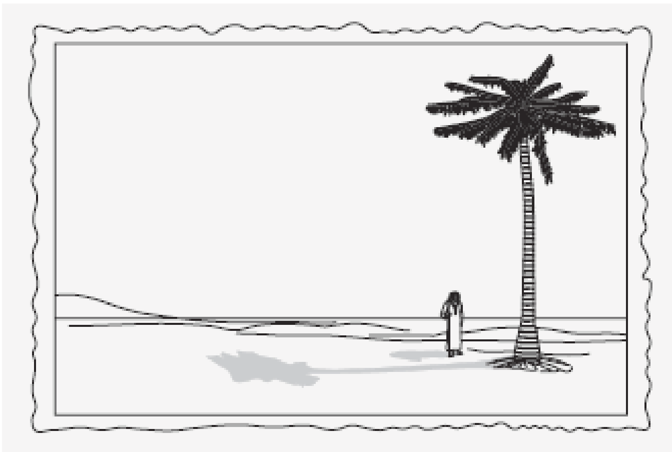


🛠 Atividades práticas:

1) Observe o desenho abaixo e descubra qual deve ser o comprimento da ponte.
Nas figuras abaixo, calcule o valor de x (as retas a, b e c são paralelas).



2) A imagem de uma foto é, em geral, semelhante ao que se vê na realidade. Imagine que o desenho abaixo seja uma foto. Que proporção você pode estabelecer entre a altura do coqueiro, a altura da pessoa e suas respectivas sombras? Meça as figuras com a régua e confira se há proporcionalidade



Teorema de Pitágoras

Um pouco de História

Quem foi Pitágoras e o que ele fez?

Pitágoras foi um dos vultos mais elevados deste ciclo de civilização. Nasceu na ilha de Samos, na Jônia (Grécia) no ano 585 AC. Quando ainda criança ele foi levado para residir no Líbano, onde um sacerdote disse à sua mãe: *"Ó mulher Jônica, teu filho será grande pela sabedoria; os gregos já possuem a ciência dos deuses, mas a ciência de Deus só se encontra no Egito"*. Sua mãe, então, resolveu mandar o jovem Pitágoras para o Egito a fim de obter a sua iniciação.

Grande matemático, Pitágoras legou importantes conhecimentos à humanidade, e por outro lado foi também um místico proeminente. Estabeleceu um sistema político, além do movimento religioso, educativo e foi considerado aristocrático e ditatorial. Platão, assim como Aristóteles foram discípulos da Escola Pitagórica. O que Platão escreveu na sua obra "A República" teve como base os ensinamentos da Escola Pitagórica.

Pitágoras (do grego **Πυθαγόρας**) foi um filósofo e matemático grego que nasceu em Samos pelos anos de 571 a.C. e 570 a.C. e morreu provavelmente em 497 a. C. ou 496 a.C. em Metaponto.

A sua biografia está envolta em lendas. Diz-se que o nome signfica *altar da Pítia* ou *o que foi anunciado pela Pítia*, pois sua mãe ao consultar a pitonisa soube que a criança seria um ser excepcional.

Pitágoras foi o fundador de uma escola de pensamento grega chamada em sua homenagem de *pitagórica*.

✏ Atividade: O que é teorema?

Consulte, utilizando o dicionário, o significado da palavra teorema, converse com o colega que está ao seu lado e registre pontos importantes da discussão. Relate para a turma as conclusões que a dupla chegou sobre "O que é teorema?"

✏ Atividade: Os ângulos que os cercam

Observe em nossa sala a grande quantidade de ângulos retos que se pode notar nos objetos que nos cercam (vidraças, portas, mesas, armários, molduras de quadros, caixas usadas para embalagens, chão das salas, etc.).

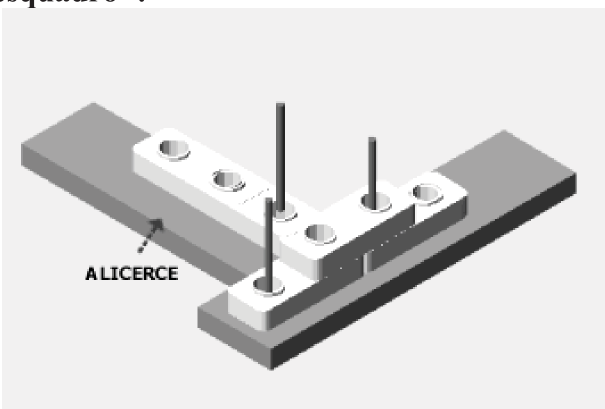
1) O termo retângulo significa: "reto ângulo".

2) O Teorema de Pitágoras se aplica aos triângulos retângulos e, portanto, conhecê-lo envolve entender como se resolvem alguns problemas práticos.

✏ Atividade: Utilizando o triângulo retângulo

Apresente algumas situações que você acha que seriam possíveis de serem explicadas com a utilização do triângulo retângulo. (Esta questão deve ser refletida individualmente e depois socializada oralmente, registrando no quadro de giz as situações apresentadas).

🛠 A Etnomatemática da construção civil: Como saber se um alicerce está no "esquadro"?

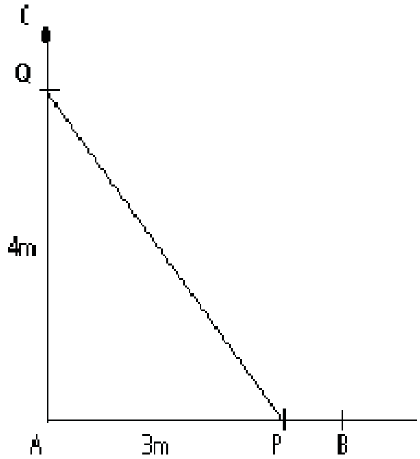


Para construir uma casa, o arquiteto deve projetá-la e desenhar a planta. Essa planta é entregue para um mestre de obras, que geralmente é uma pessoa que tem um conhecimento prático muito grande de construção e, portanto, irá supervisioná-la.

O mestre e seus ajudantes traçam no terreno, de acordo com a planta, as linhas que demarcarão os alicerces da casa. Para isso eles usam barbantes, estacas, metros de carpinteiro etc. No momento de marcar o alicerce que é a base da casa, normalmente onde se encontram, o chão, duas paredes, é preciso saber se elas formam ângulos retos, que na linguagem dos construtores significa “estar no esquadro”. Como os construtores verificam se esse alicerce será construído “no esquadro”, isto é, se o canto forma um ângulo reto?

Veja como isso é feito analisando este esquema:

Inicialmente eles esticam um fio entre as duas estacas A e B cravadas no terreno. Depois, esticam outro fio entre A e C, que não é cravada no chão (o fio entre A e C não deve ser cravado no chão, pois ele será ajustado até a parede ficar no esquadro).

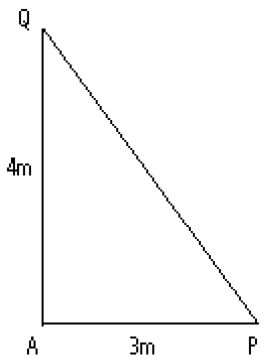


Para ter certeza de que os fios AB e AC formam um ângulo reto, o mestre de obras e seus ajudantes fazem, por exemplo, o seguinte:

- Sobre o fio AB, marcam P a 3 m de A;
- Sobre o fio AC, marcam Q a 4 m de A;

Depois, medem PQ. Se a medida de PQ for 5m, o ângulo Â é reto. Se for inferior a 5m, isso significa que o ângulo Â é inferior a 90º e, portanto, o alicerce não está no esquadro.

Assim, utilizando o triângulo que mede 3m, 4m e 5m, eles têm certeza que o alicerce “está no esquadro” porque esse triângulo é retângulo.



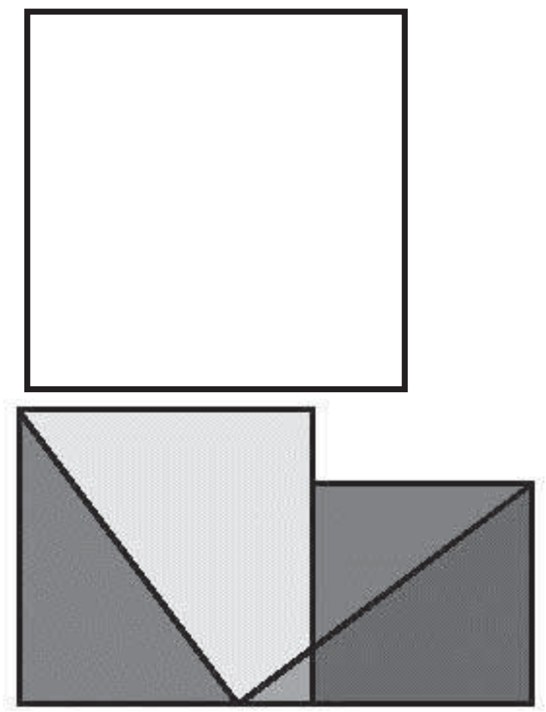
Na Matemática os lados AQ e AP são chamados de catetos e o lado PQ de hipotenusa do triângulo.

Atividade: Escreva, em seu caderno, as conclusões a que chegou após a leitura do texto “Como saber se um alicerce está no “esquadro”? Apresente suas conclusões para a turma. Você já viu algum pedreiro ou mestre de obras usar esse conceito na construção, mesmo que ele não conheça formalmente o teorema de Pitágoras?

Dica: O texto *“Das transmissões via satélite ao Teorema de Pitágoras”,* apresentado no livro da coleção “Vivendo a Matemática, Descobrindo o Teorema de Pitágoras”, de Luis Márcio Imenes e Marcelo Lellis, Ed. Scipione. **É uma boa leitura para este assunto.**

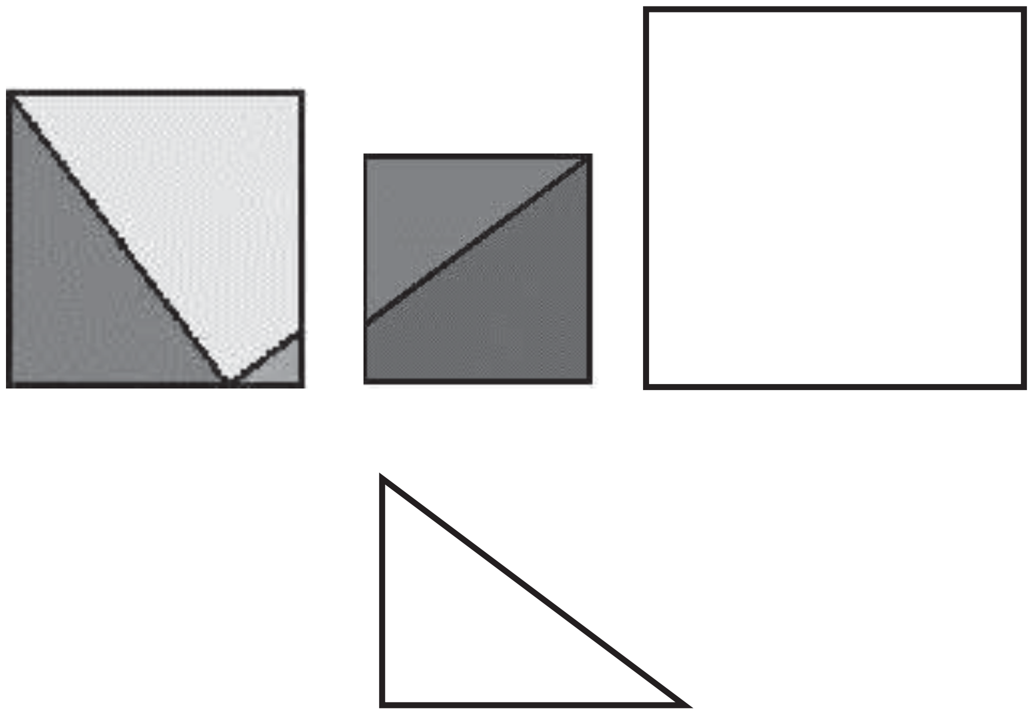
Atividade prática: O quebra-cabeça geométrico.

Os dois quadrados deverão ser recortados em cinco peças para que você possa juntá-los novamente para formar um só quadrado maior.



Atividade prática: Verificando o Teorema de Pitágoras

Recorte os quadrados abaixo (**nos desenhos que estão em anexo no final da apostila**) e arrume-os de forma que o lado do quadrado maior esteja sobre a hipotenusa do triângulo retângulo abaixo e os outros dois quadrados estejam sobre os catetos do triângulo.



Questão: ***Que relação existe entre as áreas dos quadrados construídos sobre os catetos e a área do quadrado construído sobre a hipotenusa do triângulo base?***

Atividade: A relação pitagórica

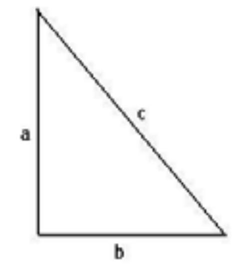
Nas atividades anteriores observe que as medidas do triângulo utilizadas pelo mestre de obra são 3 m, 4 m e 5 m. Estas medidas indicam a relação pitagórica.

a) No papel quadriculado, construa triângulos retângulos de diferentes medidas. Verifique se a relação pitagórica está presente nos triângulos construindo quadrados nos lados deste triângulo (na hipotenusa e nos catetos)

b) Quais as condições para que a relação pitagórica esteja presente num triângulo?

Dica: Organize, com o seu professor, na sala de aula uma exposição dos diferentes triângulos construídos, que expressam a relação pitagórica.

✎ Atividade: A sistematização



Cada grupo deve fazer o registro das descobertas feitas nas atividades anteriores.

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

“Em todo triângulo retângulo, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa”.

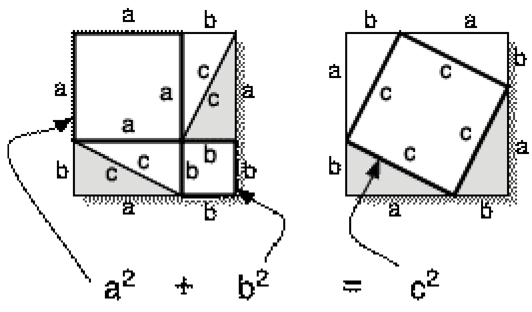
✎ Atividade: Relação pictórica

Represente em papel quadriculado um triângulo acutângulo e um obtusângulo. Desenhe, utilizando os lados destes triângulos, quadrados de lado iguais aos lados dos triângulos desenhados.

Verifique através de contagem a relação entre as áreas, da mesma forma como foi feito no triângulo retângulo. O teorema de Pitágoras vale para estes triângulos?

‽ Tentando justificar o teorema de Pitágoras...

Matematicamente, se **c** representar a hipotenusa e **a** e **b** os catetos, vem que:

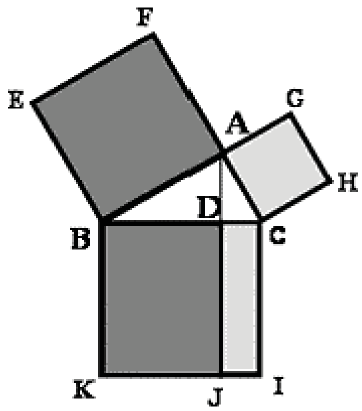


$$c^2 = a^2 + b^2$$

Essa demonstração está muito complicada? Peça a ajuda do seu professor...

Existem centenas de demonstrações para o Teorema de Pitágoras. Na verdade ele é o que possui mais demonstrações de todos os teoremas da matemática!

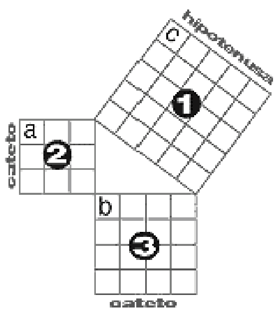
Observe essa:



Atividade curiosa:

Formando quadrados com as medidas dos catetos e somando suas áreas temos a medida do quadrado formado pela hipotenusa.

Conte os quadradinhos de cada quadrado do desenho:



O cateto ***a*** tem quantos “quadradinhos”?____

E o cateto ***b***?____

E a hipotenusa?____

Some as áreas (o número de quadrinhos) dos dois catetos?______________________________

Ficou igual a área da hipotenusa?____

Interessante não?

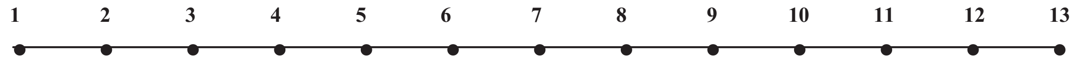
Faça esse mesmo cálculo com outros triângulos retângulos...

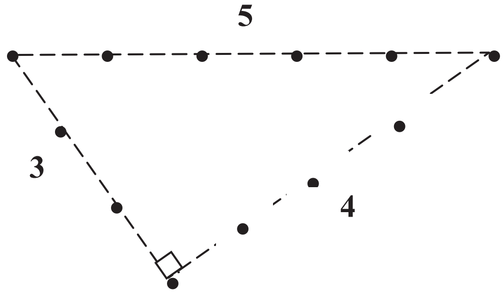
Atividade prática:

O rio Nilo foi de grande importância para a civilização egípcia. A região próxima de suas margens é muito fértil, o que possibilitou grande desenvolvimento da agricultura. Nos meses de julho a setembro ocorrem as enchentes e na Antiguidade, essas enchentes derrubavam as cercas e muros que dividiam os terrenos dos agricultores. Quem remarcava as fronteiras dos terrenos eram os **esticadores de cordas**, que usavam cordas marcadas com nós separados a uma **mesma distância**. Uma corda com treze nós era utilizada para formar ângulos retos, necessários para a construção dos muros, das pirâmides etc. As cordas eram dobradas formando um triângulo cujas medidas dos lados eram de 3, 4 e 5 intervalos (a unidade padrão é a distância entre dois nós).

Observe a figura abaixo:

Corda com 13 nós





a) Você conhece a técnica utilizada pelos pedreiros na construção civil ? Pergunte a um pedreiro para explicar como é utilizada a técnica da construção do ângulo reto, a partir do processo usado pelos esticadores de cordas.

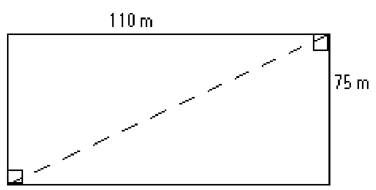
b) Professor, divida a sua turma em grupos e crie atividades na sala de aula, baseada no processo utilizado pelos **esticadores de cordas**.

c) Após desenvolver essas atividades, discuta com a sua turma as conclusões de cada grupo.

Atividade:

Problema I

Na figura abaixo, representamos um campo de futebol, com suas dimensões. Atravessando o campo na diagonal (observar a linha tracejada), quantos metros serão percorridos aproximadamente?



Problema II

Um triângulo cujos lados medem 140 cm, 48 cm e 148 cm seria um triângulo retângulo? Justifique sua resposta.

Problema III

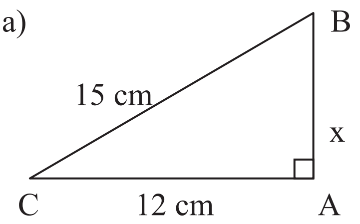
Um homem percorre 16 km na direção norte e 12 km na direção leste. A que distância está do ponto de partida?

ponto de partida

Atividades complementares:

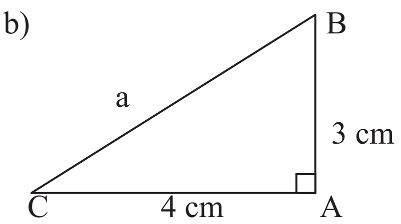
1. Aplicando o teorema de Pitágoras, determine as medidas desconhecidas.

a)



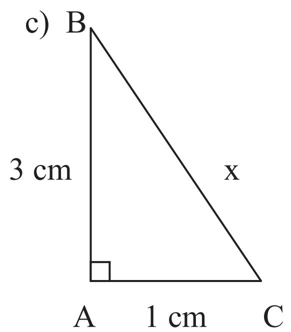
x = ____________________

b)



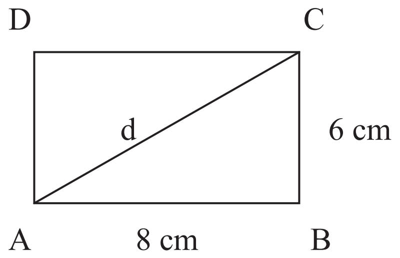
a = ____________________

c)



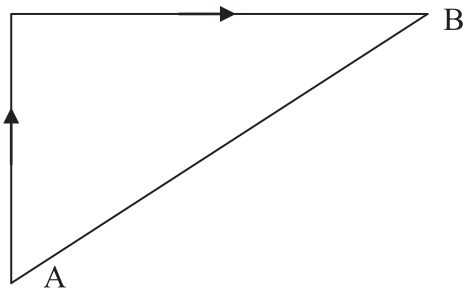
x = ____________________

2. Calcule a medida da diagonal do retângulo abaixo:



d = ________________

3. Um ciclista, partindo do ponto A, percorre 15 km para o norte; a seguir, fazendo um ângulo de 90^0, percorre 20 km para o leste, chegando ao ponto B. Qual é a distância, em linha reta, do ponto B ao ponto A?



Atividade de auto avaliação

- Você teve dificuldade em realizar alguma atividade proposta? Justifique.
- Em qual (is) exercício(s) você teve dificuldade de entendimento?
- Em qual (is) exercício(s) você teve facilidade para resolver?
- Relate uma atividade que achou interessante desenvolver no estudo do “Teorema de Pitágoras”. Justifique o porquê da escolha.

Projeto:

Observe algumas fotos que representem estruturas de telhado chamadas de “tesouras do telhado” (no livro “Descobrindo o Teorema de Pitágoras” há algumas) e discuta com seus colegas a relação entre o comprimento das vigas, a largura da casa e a inclinação do telhado. Destaque, em grupo, as relações que podem ser feitas entre as estruturas observadas e o Teorema de Pitágoras, elabore diferentes problemas (variando as medidas das estruturas dos telhados) e depois troquem entre si para serem resolvidos.

Após o término da atividade participe do debate sobre os problemas elaborados e as soluções apresentadas. É importante perceber a necessidade de escrever enunciados claros e de justificar as soluções encontradas.

As estruturas dos telhados que serão apresentados para a turma poderão estar desenhadas numa cartolina, escrever o enunciado do problema e registrar a estratégia de solução encontrada. Com esse material organizar um painel para ser exibido na sala.

UP-2: TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO

Probabilidades

♠ Um pouco de História

Muitos matemáticos entre 1500 e 1933 ajudaram a desenvolver a teoria das probabilidades. Por volta de 1650 Blaise Pascal, através de um contato com um jogador Francês, desenvolveu estudos sobre jogos de dados. Com o objetivo de responder a um desafio colocado pelo jogador Francês, Pascal desenvolveu a moderna teoria das probabilidades.

♣ A probabilidade em nosso cotidiano

Nosso dia-a-dia está cheio de probabilidade e nem nos damos conta disto. A probabilidade está associada a diversas questões do cotidiano:
♣ Quais as chances de se ganhar na loto? E no bingo?
♠ Qual a previsão do tempo para o próximo Domingo?
♥ Quais as minhas chances de ser selecionado para um emprego?
♦ Como se processam as pesquisas eleitorais?
♣ Por que o seguro do meu carro é tão caro e está associado ao bairro onde moro?
♠ Quanto receberei de aposentadoria se contribuir para a previdência privada?
♥ Como é o cálculo da expectativa de vida?

Ao respondermos estes questionamentos estamos trabalhando no campo das incertezas, das chances ou previsões- da probabilidade.

♥ Probabilidade e experimentos

A probabilidade estuda situações que não produzem sempre o mesmo resultado, como por exemplo o número de alunos de uma turma que nasceram no mesmo mês ou em um mesmo dia. Como o resultado, em turmas diferentes, mantêm um certo comportamento uniforme, muito próximos um dos outros, pode-se descrever esta situação através de modelos probabilísticos.

Luiz Manoel no volume 2 de Matemática Discreta coloca:
“ Os experimentos aleatórios não produzem sempre o mesmo resultado, mas têm um comportamento estatístico regular, no sentido de que, considerando um grande número de realizações, cada resultado possível ocorre numa freqüência que pode ser avaliada. Assim, se lançarmos uma moeda equilibrada, repetidamente, um grande número de vezes, nossa intuição e nossa experiência nos levam a esperar que a quantidade de vezes de dar “cara” na face de cima será, aproximadamente, igual à de dar “coroa”.

Os experimentos aleatórios estão sujeitos a todo tipo de incertezas. Como não se pode determinar o resultado de antemão, deve-se determinar as possibilidades de ocorrência de cada experimento aleatório.

A teoria das probabilidades estuda a forma de estabelecer as possibilidades de ocorrência de cada experimento aleatório.

♠ Leitura Interessante

Feliz Aniversário

Em março, nós lhe perguntamos como você poderia descobrir quantas pessoas em uma sala tinham a mesma data de aniversário. Nossa solução está apresentada abaixo.
Muitas pessoas fazem aniversário no mesmo dia que você. Com apenas 366 datas possíveis para fazer aniversário e mais de 6 bilhões de pessoas no mundo, deve haver um bom tanto de gente comemorando mais uma ano de vida no mesmo dia que você. Mas se você estivesse dentro de uma sala com algumas pessoas? Qual a probabilidade de haver ao menos um aniversário em comum? Quantos alunos há em sua classe? Existem muitos aniversários em comum? Você consegue descobrir essas informações de outras classes em sua escola?
Se você estiver em uma sala com um grupo de pessoas, veja se há algum aniversário em comum. Percorra a sala perguntando às pessoas suas datas de aniversário e veja se elas coincidem.
Quantas pessoas você acha que deveria haver na sala para termos uma boa chance de no mínimo duas delas fazerem aniversário no mesmo dia? Em outras palavras, são necessárias quantas pessoas para que a probabilidade de um aniversário em comum ser maior que 50%? De quantas pessoas você precisa para a probabilidade ser maior que 90%?
Antes de tentar descobrir, dê um palpite. Em seguida, calcule as respostas. Você pode se surpreender.

Solução
Uma maneira de resolver isso é virar o problema ao contrário e pensar qual a probabilidade de NÃO HAVER coincidências em um grupo de determinado tamanho. Se houver apenas uma pessoa em uma sala, não há possibilidades de aniversários em comum, já que não há ninguém para compartilhar. A probabilidade de não haver coincidências nesse caso é 1. Eventos considerados certos têm a probabilidade de 1. No outro extremo, com 367 pessoas na sala, é certo que haverá pelo menos um aniversário em comum, já que não há datas o suficiente para todo mundo.
Agora imagine que uma segunda pessoa entre na sala. A probabilidade de essa pessoa não ter o mesmo aniversário do primeiro ocupante da sala é 365 / 366, ou 0,997. Existem 366 datas de aniversário possíveis e somente uma deles coincide.
Agora, se as duas primeiras pessoas na sala tiverem datas de aniversário diferentes e uma terceira pessoa entrar, há dois dias ocupados – portanto, a probabilidade de não haver compartilhamento entre os três é de 1 x 365 / 366 x 364 / 366 = 0,992, que ainda é mais de 99%. Então, com 2 ou 3 pessoas na sala, há menos de 1% de chance de um aniversário em comum.
Você pode continuar a calcular as chances de não ter um aniversário em comum para qualquer número de pessoas:
1 x 365 / 366 x 364 / 366 x 363 / 366 x 362 / 366 ...

As coisas mudam rapidamente à medida que o número de pessoas aumenta. Com 10 pessoas na sala, ainda há mais de 10% de chance de uma coincidência. Quando há 23 pessoas na sala, a chance de um aniversário em comum é levemente maior de 50%, e aumenta para mais de 90% com 41 pessoas.

Enigmas Matemáticos do Mês: Março de 2001
Retirado do site http://www.seed.slb.com/pt/scictr/lab/math/mar01.htm em 29/08/2006

♥ Resolva

Qual é o número mínimo de pessoas que devemos reunir para que tenhamos certeza de que entre elas há duas que fazem aniversário no mesmo mês?

♦ Experimento 1

Pegue uma moeda, faça diversos lançamentos para cima e preencha a tabela:

Número de lançamentos	Número de caras obtido	Número de coroas obtido
4		
16		
32		
64		

Discuta com seu colega a seguinte questão:

♣ O que deve ocorrer com o experimento se o número de lançamentos for aumentado para um valor bem alto na ordem dos milhares?

♠ Frequência relativa

A frequência relativa de um determinado experimento aleatório é definida como a razão entre o número de vezes em que um certo resultado foi obtido (n) e o número de realizações deste experimento (m).

$$F_{req} = \frac{n}{m}$$

♦ Experimento 2: **Jogo do Par ou Ímpar**

....um, dois, três e já...

Você certamente deve lembrar deste jogo, pois o mesmo nos remete aos tempos de criança onde muitas de nossas brincadeiras tinham início em um jogo de par ou ímpar.

Regra do jogo: A preliminar para muitos jogos infantis é tirar o par ou ímpar. Os dois jogadores ou os dois cabeças do jogo, ficam frente a frente, um diz: - Par!, o outro diz: - Ímpar! ou vice-versa, mantendo as duas mãos fechadas atrás das costas. Trazem as mãos para a frente com a palma para baixo, simultaneamente, apresentando um, dois, três, quatro ou cinco dedos em cada mão, ou nenhum. Somam-se os números. Se a soma é um número par, ganhou o que disse : "par!". Se a soma é um número ímpar, ganha quem disse: “ímpar”.

Dividam-se em duplas, façam as jogadas, anotem os resultados obtidos e preencham a tabela a seguir:

JOGO DO PAR OU ÍMPAR				
Nº de Jogadas (m)	Nº de pares (np)	Freq de pares	Nº de ímpares (ni)	Freq de ímpares
10				
20				
30				
40				
50				

Tarefa:

✶ Analise os resultados obtidos nas colunas das freqüências relativas;

✸ Peça ao seu professor para calcular a freqüência relativa de todos os jogos realizados pelos grupos em sala de aula;

✹ Verifique se o mesmo resultado seria obtido caso o jogo fosse de “cara ou coroa”

♠ Leitura Interessante

Par ou ímpar?

É possível fazer algo não trivial a partir de um jogo aparentemente banal!

O jogo 'par ou ímpar' é bem popular. Um número par é aquele divisível por dois, e um ímpar, quando dividido por dois, deixa resto um. Assim, o protocolo do jogo é o seguinte: os jogadores escolhem quem é 'par' e quem é 'ímpar' (às vezes, isso gera certa discussão). Chegado a um acordo, conta-se até três e, em seguida, cada jogador mostra certo número de dedos de uma das mãos. Se a soma dos dedos apresentados for par, ganha o jogador que escolheu par; se for ímpar, vitória do outro.

Como a regra básica de soma é 'par + par → par', 'par + ímpar → ímpar', 'ímpar + par → ímpar' e 'ímpar + ímpar → par', não faz diferença se você mostrou um, três, cinco, sete ou nove, por exemplo (às vezes, as crianças usam as duas mãos, em uma variação do jogo). O que importa é se o número é ímpar ou par. Assim, caso quisessem, os jogadores poderiam se contentar em usar apenas zero, que é par, e um, que é ímpar. Mas devo admitir que isso tiraria um pouco da graça do jogo.

Não parece que podemos extrair alguma coisa muito interessante do 'par ou ímpar'. Mas essa é uma das belezas da matemática: poder fazer algo não trivial a partir de algo que parece muito simples. Nesse caso, a idéia é poder separar os números inteiros em dois grupos (pares e ímpares), e (aqui entra a lição do nosso jogo) o fato de que somar um a um número muda-o de grupo, ou seja, se for par, vira ímpar; se for ímpar, torna-se par. Simples, não? Sim, mas poderoso. Vejamos uma aplicação dessa idéia.

Sugestão de jogo para uma festa: pergunte a cada convidado quantas vezes ele apertou a mão de outra pessoa. Você notará o seguinte: o número de pessoas que apertaram mãos um número ímpar de vezes é sempre par! Como é possível? Por que cinco pessoas, por exemplo, não poderiam ter dado um número ímpar de apertos de mão? (alerta: a chance de você

conseguir realizar essa enquete com sucesso é mínima, sem contar a alta probabilidade de você se tornar o 'chato' da festa).
O argumento é simples. Vamos associar a letra P a quem apertou mãos um número par de vezes, e a letra I a quem apertou um número ímpar. No início da festa, quando ninguém apertou a mão de ninguém, todo mundo é P. Quando começam os apertos, o cenário muda. Por exemplo, a primeira vez que você aperta a mão de alguém passa para I; na próxima, volta a ser P. E assim por diante.
Separemos os convidados em Ps e Is. Toda vez que dois membros do grupo P se cumprimentam, ambos passam para o grupo I (ou seja, o grupo I aumenta em dois membros). Quando dois Is apertam as mãos um do outro, esse grupo diminuiu em dois membros. E, quando um P aperta a mão de um I (ou vice-versa), eles trocam de grupo (com essa troca, o número de membros em cada grupo não se altera).
Portanto, podem acontecer três coisas no grupo dos Is: a) ele aumenta em dois membros; b) diminui em dois membros; c) fica inalterado. Mas, nesses três casos, a variação no número de membros foi um número par. Ou seja, se era par no início, será par sempre; se era ímpar no começo, será ímpar sempre. Mas, no início, antes de qualquer aperto de mão, o número de membros no grupo I é zero, que é um número par. Assim, o número de membros do grupo I será sempre par!
Comentário final: não se surpreenda se, depois de propor ou tentar realizar esse jogo em uma festa, você ficar sem seu 'par'...

Artigo publicado no site da revista ciência hoje http://ich.unito.com.br/4315 acessado em 28/08/2006
Marco Moriconi (moriconi@cienciahoje.org.br)
Instituto de Física, Universidade Federal Fluminense.

♣ Probabilidade

Considere o seguinte experimento aleatório proposto na tarefa ✹ do experimento 2: lançar uma moeda e observar a face voltada para cima. Este experimento possui dois resultados possíveis: cara ou coroa.

O conjunto dos resultados possíveis do experimento do jogo de cara ou coroa chamamos de espaço amostral e é representado pela letra E, neste caso igual a 2.

Um subconjunto do espaço amostral é chamado de **evento** e é denotado por letras maiúsculas. No experimento da cara ou coroa, podemos definir dois eventos: um evento A para o caso de ocorrer cara e um evento B para o caso de ocorrer coroa.

Os eventos A e B são chamados de **eventos simples** pois são constituídos de apenas um elemento do espaço amostral.

Seja E um evento qualquer do espaço amostral. Se os eventos simples são equiprováveis podemos calcular a probabilidade P(E) através da razão entre o número de casos favoráveis a E o número de resultados possíveis do experimento.

$$P(E) = \frac{\text{número de casos favoráveis a } E}{\text{número de resultados possíveis do experimento}}$$

Para o experimento de cara ou coroa, se a moeda é não viciada, os eventos A e B são equiprováveis e valem respectivamente,

$P(A) = \frac{1}{2}$ e $P(B) = \frac{1}{2}$

♦ Experimento 3: Lançamento de um dado equilibrado

A partir de um dado equilibrado (não viciado) determinar a probabilidade de ocorrer os eventos a seguir:
⌧sair o número 3
⌧sair um número par
⌧sair um número maior que 5

O número de elementos do conjunto dos resultados possíveis para este experimento é igual a 6, pois todas as suas seis faces têm a mesma chance de sair voltada para cima. Desta forma podemos dizer que o espaço amostral do experimento é {1, 2, 3, 4, 5, 6}, portanto a probabilidade de cada face sair voltada para cima é 1/6.
⌧sair o número 3
A probabilidade de sair o número 3 é dada por P({3})= 1/6

⌧sair um número par
A probabilidade de sair um número par é dada por P({2, 4, 6})= 1/6 + 1/6 + 1/6 = ½

⌧sair um número maior que 5
A probabilidade de um número >5 é dada por P({6})= 1/6

♦ Experimento 4: Lançamento de duas moedas equilibradas

A partir do lançamento duas moedas equilibradas determinar a probabilidade de ocorrer os eventos a seguir:
⌧dar duas caras
⌧dar, ao menos, uma cara
⌧dar, ao menos, uma cara e uma coroa

O número de pares de elementos do conjunto dos resultados possíveis para este experimento é igual a 4, pois cada par tem a mesma chance de acontecer. Desta forma podemos dizer que o espaço amostral do experimento é {(cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)}, portanto a probabilidade de cada evento acontecer é de ¼.
⌧dar duas caras
A probabilidade de acontecer o par (cara, cara) é P({(cara, cara)})= 1/4

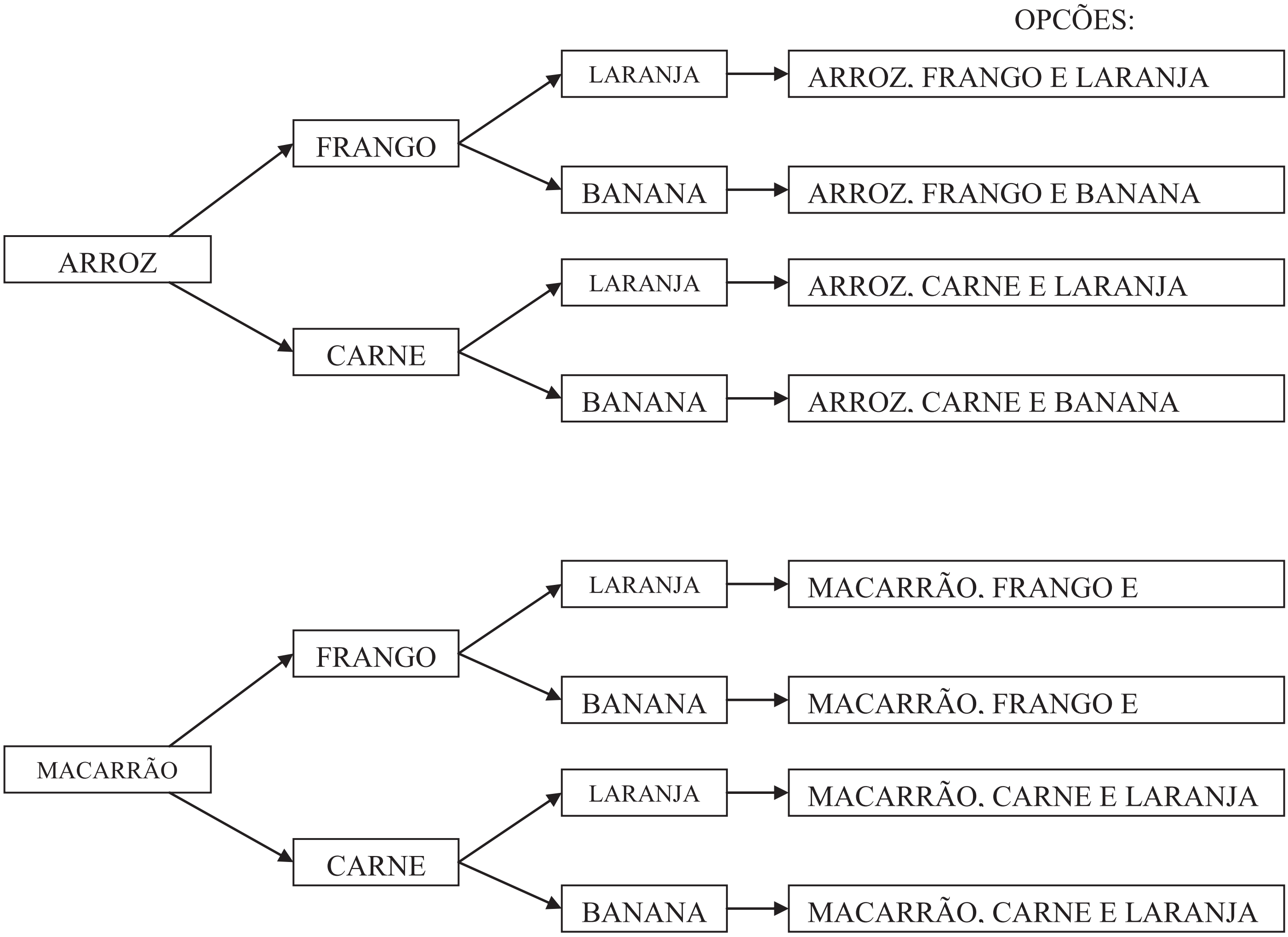
⌧dar, ao menos, uma cara
A probabilidade de acontecer este evento é dada por P({(cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa)})= 3 x ¼ = 3/4

⌧dar, ao menos, uma cara e uma coroa
A probabilidade de acontecer este evento é dada por P({(cara, coroa), (coroa, cara)})= 2 x ¼ = ½

O Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

As primeiras atividades matemáticas que vivenciamos envolvem sempre a ação de contar objetos. Com o passar do tempo, aprendemos a somar, subtrair, multiplicar e dividir em diferentes conjuntos numéricos. Os diferentes significados que assumem estas operações são importantes pois nos possibilitam fazer escolhas de que operação iremos realizar na resolução de um determinado problema. Um dos significados da multiplicação, e o que é mais conhecido, é o da adição de parcelas iguais porém, a multiplicação também é a base de um raciocínio muito importante em matemática, chamado de Princípio Multiplicativo. O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos, como veremos nas próximas aulas.

Maria trabalha como merendeira na escola, para a refeição de hoje ela deverá decidir se irá cozinhar arroz ou macarrão. Também tem que escolher entre fazer frango ou carne. E para fruta ela tem a opção de servir laranja ou banana. Vejamos de quantas maneiras ela pode organizar a refeição.



Observando o esquema anterior (chamamos de árvore das possibilidades), percebemos que Maria tem 8 possibilidades de organizar, de forma diferente, a refeição.

Atividade: Com o seu colega, tente organizar a árvore de possibilidades para a situação descrita a seguir:

Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, e bife), 2 saladas (legumes e verdura) e 3 sobremesas (sorvete, pudim, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

Representando na forma de árvore de possibilidades, conseguimos visualizar de maneira clara as possibilidades que temos.

Porém nosso objetivo é saber as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades, sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidos num problema.

O princípio multiplicativo nos fornece soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca.

Atividade:

Para a confraternização que a turma 162 estava organizando, Gustavo sugeriu que fosse organizado um festival de sorvetes. Teria sorvete de morango, chocolate e creme, que são os sabores preferidos pela maioria dos alunos.

Luíza, indignada, logo reclamou: - com apenas estes três sabores, haverá poucas possibilidades de escolha para um sorvete com três bolas.

Beatriz, que adora sorvete de creme, completou: - Você não está pensando em todas as possibilidades Luíza, eu só gosto de sorvete de creme, meu sorvete terá as três bolas do mesmo sabor e, para mim, sorvete de creme, chocolate e morango é diferente de sorvete de creme, morango e chocolate. Desta forma teremos uma variedade enorme de sorvetes.

- Para mim, a casquinha de creme, chocolate e morango é exatamente igual a casquinha de creme, morango e chocolate. Protestou Luíza.

Para resolver o impasse, o professor Manoel sugeriu que o grupo resolvesse as questões apresentadas.

1) Seguindo o raciocínio de Luiza, responda o seguinte questionamento:

   a) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes diferentes com as três bolas de um único sabor?
   b) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes de três bolas, cada uma com três sabores diferentes?
   c) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes de três bolas com apenas dois sabores?
   d) Quantos tipos diferentes de sorvetes podem ser feitos?

2) Seguindo o raciocínio de Beatriz, responda as questões a seguir:

   a) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes diferentes com as três bolas de um único sabor?
   b) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes de três bolas, cada uma com três sabores diferentes?
   c) Quantas são as possibilidades de formar sorvetes de três bolas com apenas dois sabores?
   d) Quantos tipos de sorvetes diferentes podem ser feitos?

Complete a tabela a seguir com os resultados obtidos:

QUESTÕES	**RESPOSTAS**	
	LUÍZA	**BEATRIZ**
a		
b		
c		
d		

O que podemos concluir? Quem está com a razão? Justifique sua resposta:

Atividade: Lançando dois dados, simultaneamente, responda: (Realize a atividade a seguir com mais três colegas)

1) Que soma cada um de vocês escolheria? Registre esta soma no caderno.
2) De quantas maneiras diferentes podemos obter as somas escolhidas?
3) Lance os dados 50 vezes e verifique quem venceu.
4) Quando lançamos dois dados, quais as possíveis somas?

Preencha a tabela abaixo:

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

5) Quantas vezes aparece a soma que você escolheu?
6) Qual é a soma que apareceu mais vezes?
7) Qual é a soma que apareceu menos vezes?

Faça um gráfico que represente as somas possíveis.

Gráficos de linhas e colunas

Pra começo de conversa...

Diariamente nos deparamos com jornais, revistas ou outras publicações que mostram tabelas e gráficos com o intuito de traduzir fatos do cotidiano.

Há uma parte da Matemática que organiza, apresenta e analisa dados numéricos que resultam da observação de certos acontecimentos e fenômenos: é a estatística.

Em diversos setores da nossa vida, usamos os dados estatísticos para nos orientar: na economia doméstica, nas eleições, na saúde, no acompanhamento das taxas de aumento de preços, nas estatísticas populacionais, nas pesquisas de opinião e muito mais!

Com os dados organizados em tabelas e gráficos podemos tirar conclusões, tomar decisões e planejar ações futuras. Os gráficos tentam traduzir de forma imediata os resultados obtidos. São três os tipos mais comuns: barras, setores e linhas.

O Gráfico de Linhas

Os gráficos de linhas são adequados quando a intenção é levar o leitor a uma análise sobre a variação de um dado em um determinado período. A relação entre as duas variáveis apresentadas (tempo e preço; tempo e variação da inflação; tempo e variação de população, etc.) ocorre em dois eixos: um vertical e outro horizontal. O gráfico de linhas é também chamado de gráfico poligonal.

Como todo gráfico, o de linhas deve ter:

- Título (curto e que dá uma idéia do que foi pesquisado ou dos resultados que se obteve)
- Fonte (quem coletou os dados)
- Indicação do que é retratado no eixo horizontal e no eixo vertical (exemplo: tempo, quantidades, valores,...)
- Legenda, se precisar

Discussão do Texto

Questões a serem levantadas:

☞ Você costuma ler e analisar os gráficos que são apresentados nos jornais ?

☞ Hoje em dia a leitura de gráficos é considerada muito importante pois permite uma compreensão mais ampla e crítica da sociedade. Comente este fato com seus colegas e professor.

✎ Atividade 1

Observe como os gráficos podem ser utilizados para valorizar ou amenizar uma informação sobre o mesmo fato. Leia a questão a seguir aplicada pelo Ministério de Educação e Cultura –MEC – no Exame Nacional do Ensino Médio, o ENEM:

Para convencer a população local da ineficiência da Companhia Telefônica Vilatel na expansão da oferta de linhas, um político publicou no jornal local o gráfico I , a seguir representado. A Companhia Vilatel respondeu publicando dias depois, o gráfico II, pretendendo justificar um grande aumento na oferta de linhas. O fato é que, no período considerado, foram instaladas, efetivamente, 200 novas linhas telefônicas.

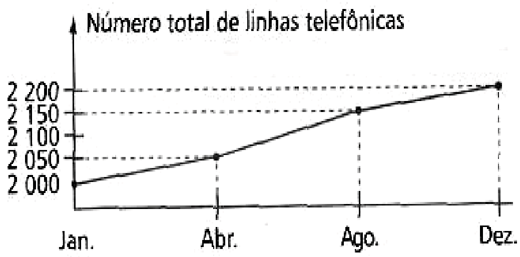


Gráfico I

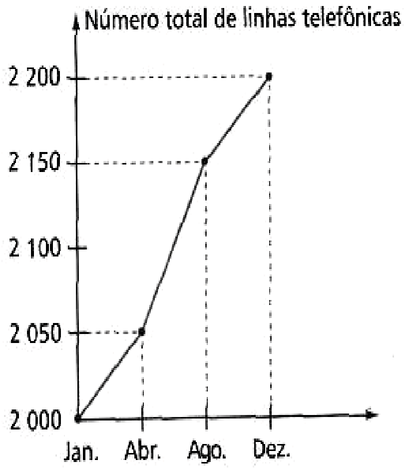


Gráfico II

Analisando os gráficos, podemos responder as perguntas:

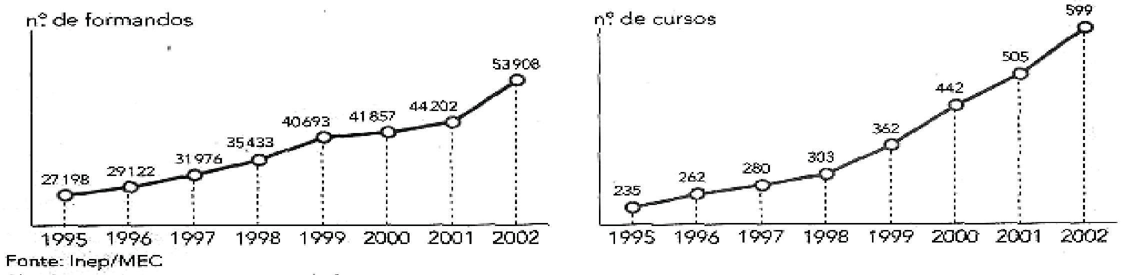
a) O gráfico II representa um crescimento real maior do que o gráfico I?
b) O gráfico I apresenta o crescimento real, sendo o gráfico II incorreto.
c) O gráfico II apresenta o crescimento real, sendo o gráfico I incorreto.
d) A aparente diferença de crescimento nos dois gráficos decorre da escolha das diferentes escalas.
e) Os dois gráficos são incomparáveis, pois usam escalas diferentes.

✎ Atividade 2

A notícia publicada no jornal O Estado de São Paulo informa sobre a decisão do MEC em suspender temporariamente a abertura de novos cursos de Direito. Os especialistas da área concordam pois o crescimento indiscriminado não vem acompanhado de uma efetiva fiscalização na qualidade da formação oferecida. Leia os gráficos:

Cada vez mais bacharéis

Cresce ano a ano o número de cursos e de estudantes formados em Direito no país



Fonte: Inep/MEC

Observação: Números mais recentes do Censo.

(*O Estado de S. Paulo*, 16/2/2004.)

Use a calculadora para responder as questões abaixo:

a) De quanto por cento aumentou o número de cursos de Direito no país de 1995 a 2002?
b) Nesse mesmo período, de quanto por cento aumentou o número de formandos?
c) Em média, quantos foram os formandos por curso em 1995? E em 2002 ?
d) Faça um gráfico de linhas com as médias do número de formandos por curso, ano a ano, de 1095 a 2002

Projeto: Estatística Familiar

Quantas vezes desejamos adquirir um novo eletrodoméstico, fazer uma viagem sonhada, presentear nossos amigos e familiares nos aniversários mas o dinheiro que possuímos não é suficiente? Dizemos, desconsolados, que nosso orçamento está no limite!

Sabemos que nosso país, há muito tempo, anda numa situação difícil e isto se reflete em muitos de nós, brasileiros.

Sendo assim, devemos procurar fazer um balanço entre os créditos e os débitos de nossas finanças, de forma a administrar o nosso orçamento.

Precisamos estar sempre atentos para que os créditos sejam maiores que os débitos, pois do contrário, ficaremos no "vermelho". Empréstimos podem piorar ainda mais a nossa situação financeira.

Faça, passo a passo, o que é pedido para organizar melhor o seu orçamento:

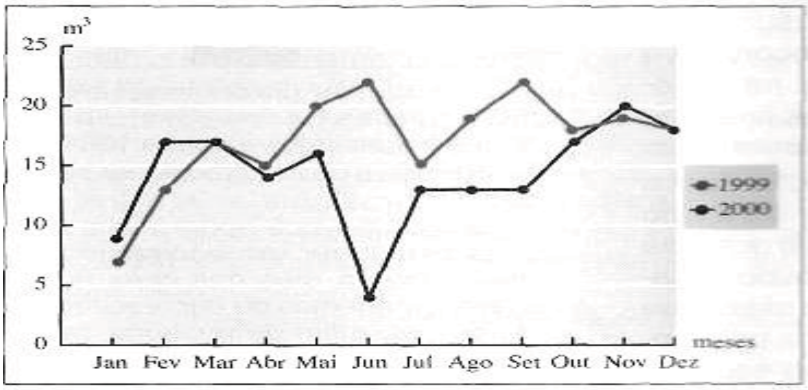
1. Planilha de gastos – com a ajuda do seu professor, monte uma tabela com todas as suas despesas do mês. Caso a sua escola possua um laboratório de informática, construa sua tabela no computador.
   Dica: Faça este acompanhamento mês a mês para controlar todas as suas despesas e para possivelmente fazer uma pequena poupança.

2. Analise suas contas de água e luz dos últimos meses. Verifique se há coerência entre o consumo e o valor a ser pago. Uma maneira de organizar e comparar o consumo é utilizando o gráfico de linhas. Traga,para a sala de aula, algumas contas para a construção deste gráfico.

   Veja como podemos trabalhar com dados de consumo de água. Você deve saber que o consumo de água é medido em m^3 . Observe o quadro e o gráfico, ambos retratando o consumo de água de uma família:

Consumo de água de uma residência no período 1999 a 2000 (em m³)

Mês / Ano	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1999	7	13	17	15	20	22	15	19	22	18	19	18
2000	9	17	17	14	16	4	13	13	13	17	20	18



Fonte: Companhia de Saneamento Básico do Estado de São Paulo (Sabesp).

3. Combata o desperdício de energia ou outros serviços. Existem várias formas de economizar. Tomando estas providências, o valor das contas irá se reduzir, gerando, assim , economia no orçamento familiar.

Veja as dicas da Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL):

🗣 Dicas: **Como evitar o desperdício de energia elétrica**

Geladeira:
- Diminua o número de vezes que a geladeira é aberta;
- Não use a parte de trás para secar roupa;
- Deixe espaço para ventilação na parte de trás;
- Não forre as prateleiras;
- Descongele regularmente;
- Verifique as borrachas de vedação;
- Aumente a regulagem da temperatura interna (Consulte o manual);
- Não coloque alimentos quentes dentro da geladeira;

Ferro Elétrico:
- Junte a roupa para passar tudo de uma única vez;
- Separe as roupas por tipo e comece pelas que exigem menor temperatura;
- Nunca deixe o ferro ligado enquanto faz outra coisa.

Televisão

- Evite manter o aparelho ligado sem que ninguém esteja assistindo. Desligar o televisor pelo controle remoto também consome energia mesmo com o aparelho desligado. Para um TV de 20 polegadas, o consumo mensal em *stand by* é 4,30 kWh

Lâmpadas

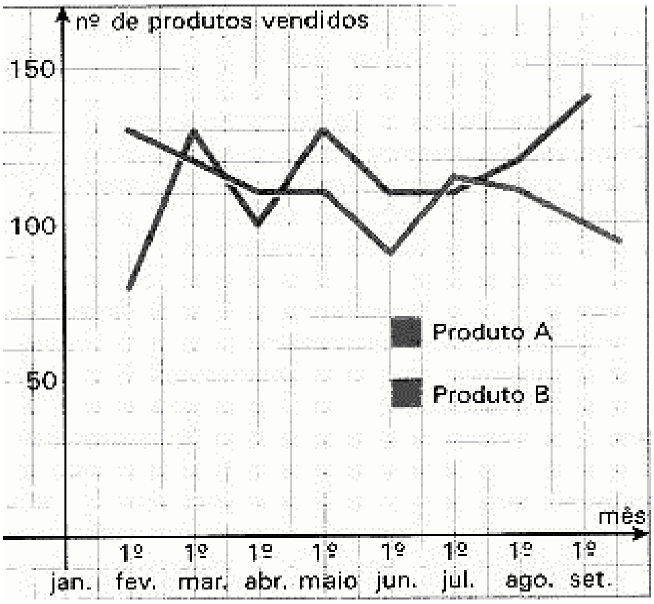
- Dê preferência a lâmpadas fluorescentes compactas ou circulares para a cozinha ou para qualquer outro local que fique com as luzes acesas mais de quatro horas por dia.
- Apague as luzes dos ambientes desocupados.
- Pinte o teto e as paredes internas com cor clara, pois elas refletem melhor a luz.

Há muitas outras dicas para você colaborar. Procure-as nas empresas de energia locais.

Conforme Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL).
Disponibilidade e acesso:
http://www.aneel.gov.br/aplicacoes/aneel_luz/default.html
(17 de agosto de 2006).

Outras atividades:

1- De acordo com o gráfico a seguir, responda:



a) Em que período se manteve constante a venda do produto A? E a venda do produto B?

b) Quantas unidades de A e B foram vendidas em 1° de março?

c) Qual foi a média de venda de B no período de fevereiro a setembro?

d) Ao analisar essa situação, que significado a média tem para você?

2- Faça o gráfico de linhas correspondente à variação mensal do INPC (Índice Nacional de Preços ao Consumidor) do ano de 2001:

3-

MÊS	**%**
Janeiro	0,77
Fevereiro	0,49
Março	0,48
Abril	0,84
Maio	0,57
Junho	0,60
Julho	1,11
Agosto	0,79
Setembro	0,44
Outubro	0,94
Novembro	1,29
Dezembro	0,74

Fonte: Fundação Getúlio Vargas,2002.

4- Elabore um gráfico representativo da dívida externa brasileira no período de 1996 a 2000:

ANO	**US$(milhões)**
1996	83 982
1997	115 587
1998	76 850
1999	116 770
2000	137 180

Fonte: Conjuntura Econômica – FGV e Valor Pesquisa Econômica,2001.

Dicas de Sites:

1. http://www.somatematica.com.br
2. http://www.ibge.com.br
3. http://www.ampla.com
4. http://aneel.gov.br

Projeto de crítica: **Vamos a partir de agora analisar um pouco a situação econômica, social e política do Brasil?**

Dica: Solicite a orientação do seu professor de geografia e história para um acompanhamento das fases desse projeto.

Atividade 1: **Produto Interno Bruto –PIB**

O PIB é o principal indicador econômico de um país, que se caracteriza pela soma de todos os bens produzidos num determinado período.

Acompanhe os dados apresentados na tabela abaixo:

ANO	PIB (EM MILHÕES DE REAIS-2004)	TAXA DE CRESCIMENTO REAL(%)
1994	1.392.139	5,9
1995	1.450.940	4,2
1996	1.489.515	2,7
1997	1.538.242	3,3
1998	1.540.272	0,1
1999	1.552.370	0,8
2000	1.620.064	4,4
2001	1.641.328	1,3
2002	1.672.954	1,9
2003	1.682.071	0,5
2004	1.769.202	5,2

De acordo com a tabela acima, qual foi o ano, em que o Brasil apresentou o maior PIB?____________________________

Nesse ano, qual foi a taxa de crescimento?__________________________

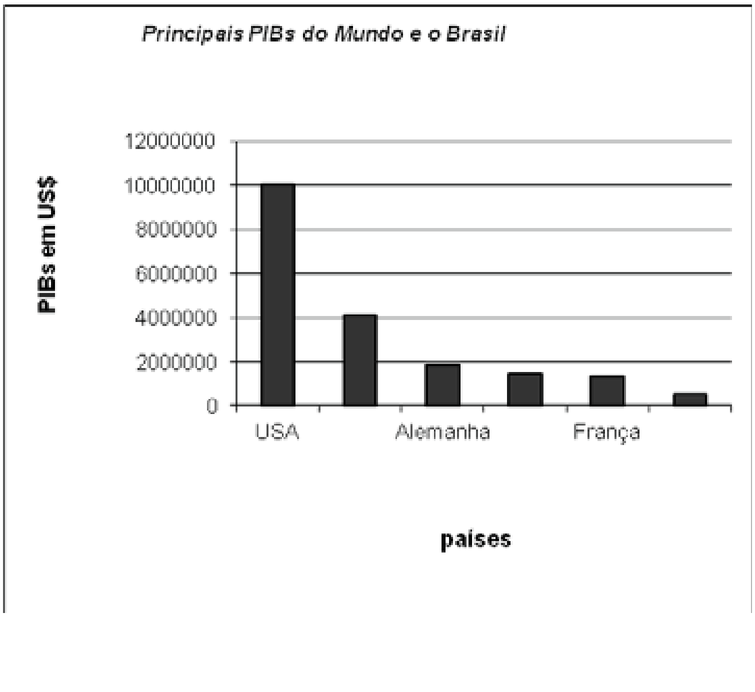
Atividade 2:

Observando a tabela a seguir e o seu gráfico de colunas correspondente com informações dos principais PIB do planeta, percebe-se que o Brasil é um país de grandes contrastes. O PIB do Brasil é um dos maiores e simultaneamente é um dos países que apresenta os maiores índices de desigualdades sociais.

Países	***PIBS EM US$***
1º) USA	10.065.265
2º) Japão	4.141.431
3º) Alemanha	1.846.069
4º) Reino Unido	1.424.094
5º) França	1.309.807
11º) Brasil	502.509

O Gráfico de Barras

Os gráficos de barras são adequados quando a intenção é levar o leitor a uma análise sobre o volume, freqüência ou intensidade de determinadas informações. O gráfico abaixo mostra a quantidade de milhões de dólares que cada país apresenta como produto interno bruto.

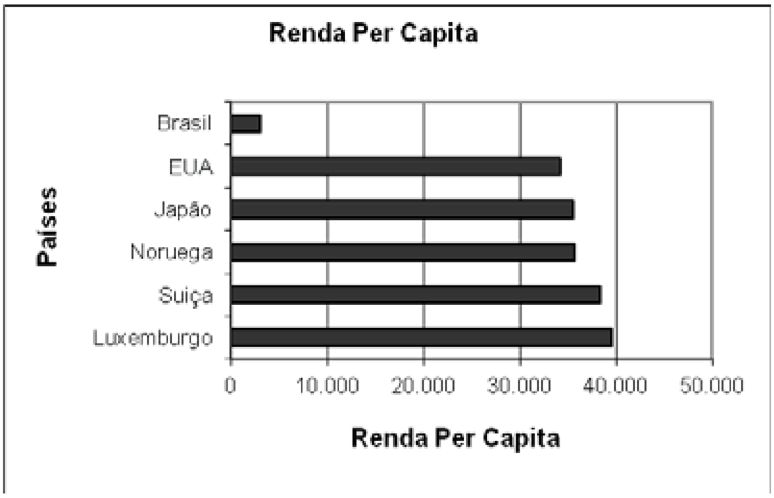


O que você acha disso? Faça um registro de suas observações a e discuta com a sua turma esta situação apresentada.

Atividade 3: Renda Per Capita – PIB Per Capita

Esse indicador, também é chamado de renda per capita, designa a produtividade média de recursos de seus residentes para o consumo ou investimento. A renda per capita é o quociente da divisão do PIB pela população total. Significa quanto cada residente de um país recebe, em média, por ano. Observe a tabela/gráfico seguinte e responda:

PAÍSES	RENDA PER CAPITA (US$)
Luxemburgo	39.540
Suíça	38.330
Noruega	35.630
Japão	35.610
EUA	34.280
Brasil	3.070



De acordo com a tabela/gráfico acima, responda:

a) Qual o país que apresenta a maior renda per capita? Por que você acha isso?

b) Qual é a renda per capita do Brasil?

c) Discuta com a sua turma, com o objetivo de propor um caminho transformador dessa realidade de extremas desigualdades sociais, descrita nas informações acima.

d) Como você sente o impacto desse índice na sua vida?

Atividade 4: Taxa de analfabetismo

No período registrado na tabela/gráfico abaixo (1970 a 2002), a taxa de analfabetismo de pessoas de 15 anos ou mais de idade vem caindo. Apesar dessa redução, o país ainda tem um total de 14,6 milhões de pessoas analfabetas.

Anos	Taxa de Analfabetismo no Brasil
1970	33,60%
1980	25,50%
1991	20,10%
2000	13,60%
2002	11,80%

Voltando ao gráfico de Linhas que representa uma análise sobre a variação de um dado em um determinado período.

De acordo com as informações apresentadas na tabela/gráfico acima, responda:

a) Qual o percentual de analfabetismo em 2002?_________________

b) O que você observa no período de 1970 a 2002, com relação ao analfabetismo no Brasil?

c) O que justifica o Brasil ter um índice de analfabetismo tão elevado?

d) A partir da discussão com sua turma, escreva um texto que proponha novos caminhos para a redução rápida do alto índice de analfabetismo no Brasil.

Anexo: