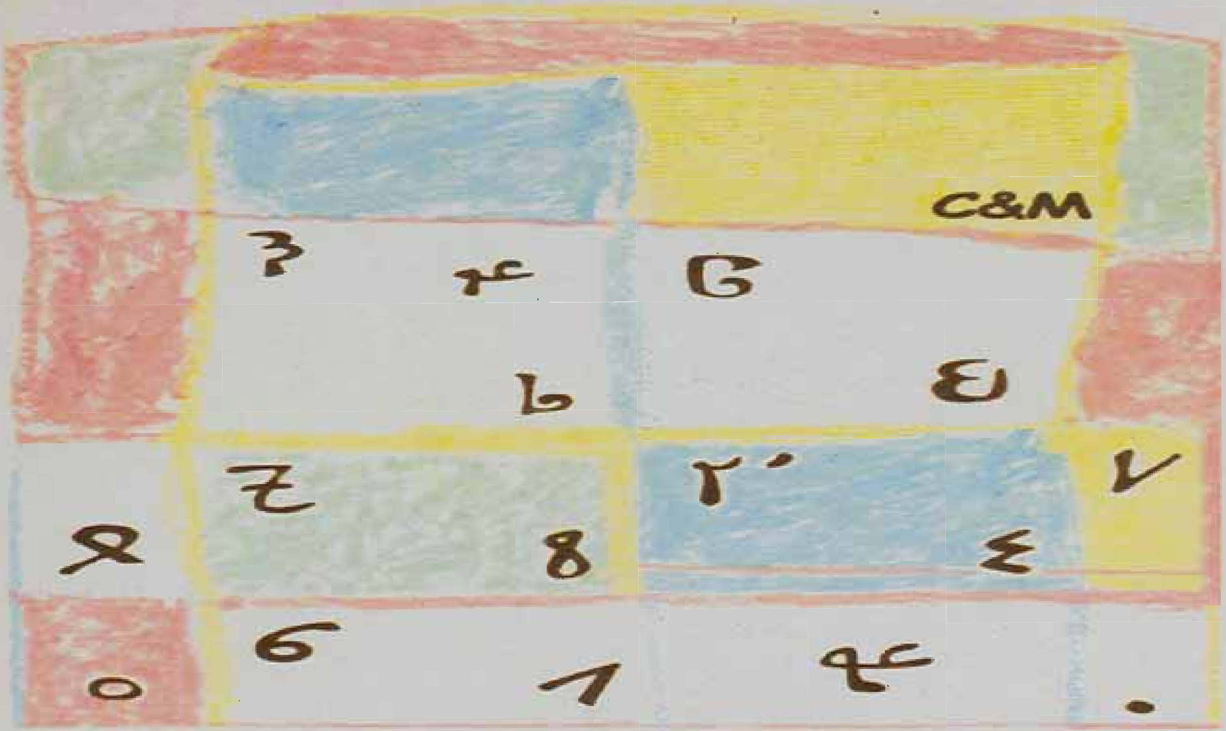
Alfabetização de Adultos em Ciências e Matemática

Wojciech Andrzej Kulesza



ESCOLA ZÉ PEÃO

Sintricom

Alfabetização de Adultos em Ciências e Matemática

ESCOLA ZÉ PEÃO
Projeto Escola Zé Peão
Universidade Federal da Paraíba
Centro de Educação
Campus Universitário
João Pessoa - Paraíba
Fone: 216-7687

Sintricom
Sindicato dos Trabalhadores nas Indústrias da Construção
e do Mobiliário de João Pessoa
R. Cruz Cordeiro, 75
João Pessoa - PB
Fone/fax: (83) 221-8937/221-1817
CGC: 09.249.236/0001-30
e-mail: sintricom@netwaybbs.com.br

Wojciech Andrzej Kulesza

(Físico e Mestre em Ciências pela UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO e Doutor em Educação pela UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Professor do Departamento de Metodologia da Educação da UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA. Coordenador do Grupo de Pesquisa "Ciência, Educação e Sociedade", do Programa de Pós-Graduação em Educação da UFPB, e pesquisador do CNPq.

Alfabetização de Adultos em Ciências e Matemática

ESCOLA ZÉ PEÃO

Sintricom

João Pessoa

2001

Desenho da capa
Luiz Severino da Cruz
(Aluno do Projeto Escola zé Peão

Organização
Concepção do Projeto gráfico
MARIA DOS MARES
MARIA DAS GRAÇAS FREIRE DE OLIVEIRA
Impressão e Acabamento
EDITORA UNIVERSITÁIRA DA UFPB

K96a	Kulesza, Wojciech Andrzej Alfabetização de adultos em ciências e mateática/ Wojciech Andrzej Kulesza. - João Pessoa: Editora Universitária/UFPB,2001. 156p. il. 1. Matemática - Estudo e ensino 2. Alfabetização
UFPB/BC	de adultos 3. Ciências - Estudo e ensino. CDU: 51

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS

Este trabalho não teria sido possível sem a motivação advinda do profícuo trabalho coletivo, juntamente com Antonio Carlos, Cleide, Estrela, Lurdinha, Paulo Marcelo, Tim e Vera, realizado durante a implantação do Projeto Escola Zé Peão. As discussões das sextas-feiras à noite, às vezes esticadas no bar da esquina, criaram as condições necessárias para o nascimento desta proposta. Foi, porém, através da implantação do programa nos canteiros de obra – no contexto de sua justificação – que ele começou a se delinear na forma em que ora apresentamos. Para isso, tanto a experiência dos professores e das professoras com a alfabetização de crianças, como sua falta de vivência maior com a matemática, foram fundamentais para instaurar a humildade, como preconizava Paulo Freire, essencial para a construção de uma educação popular dialógica. Sem citá-los nominalmente, muitos deles, hoje - graças à profunda vocação formativa da Escola Zé Peão em todos os níveis – colegas e/ou alunos de pós-graduação na Universidade, gostaríamos de deixar aqui consignado nosso reconhecimento sincero à sua participação ativa na formulação do texto aqui apresentado.

A Geraldo Perez, professor do Departamento de Matemática da UNESP em Rio Claro, agradecemos sua colaboração, especialmente no fornecimento de material bibliográfico. Por último, Aproveitamos a oportunidade para retribuir aos alunos do Curso de Licenciatura Plena em Pedagogia da UFPB, turma 99.2, a homenagem a nós prestada por ocasião de sua formatura, fruto da discussão do material aqui apresentado em nossas aulas.

Wojciech Andrzej Kulesza

APOIOS

Gostaríamos de registrar o apoio recebido das seguintes entidades durante os últimos dez anos:

- Associação de Educação Católica (AEC)
- Associação Recife/Oxford para Cooperação ao Desenvolvimento (OXFAM)
- Catholic Association for Overseas Development (CAFOD)/Inglaterra
- Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE/MEC)
- Manos Unidas/Espanha
- Movimento de Educação de Base (MEB)
- Secretaria da Educação e Cultura do Município de João Pessoa (SEDEC-JP)
- Serviço Social da Indústria (SESI)
- Secretaria Estadual do Trabalho e Ação Social (SETRAS)/Sistema Nacional de Emprego (SINE)
- Sindicato dos Trabalhadores nas Indústrias da Construção e do Mobiliário de João Pessoa (SINTRICOM)
- Universidade Federal da Paraíba (UFPB)

APRESENTAÇÃO

O livro do Prof. Wojciech Andrzej Kulesza, ou simplesmente Tek foi gestado dentro da prática educativa do Projeto Escola Zé Peão. Nas várias etapas de sua elaboração, o texto foi amplamente discutido pela equipe pedagógica do projeto – professores e coordenadores - reelaborado e modificado com base na avaliação de sua relevância e contribuição à aprendizagem do aluno trabalhador. Assim, embora de autoria do Prof. Tek, foi assumindo um caráter mais coletivo, como é a prática da Escola. O livro de alfabetização de jovens e adultos trabalhadores "Aprendendo com o Trabalho", de autoria das professoras Vera Esther J. da Costa Ireland e Maria de Lourdes P. de Oliveira, também publicado pelo projeto, passou por um processo parecido e baseia-se nos mesmos princípios básicos que orientam este livro.

O Projeto Escola Zé Peão, que nasceu em 1990 e instalou as suas primeiras salas de aula em canteiros de obras de João Pessoa no ano seguinte, constitui um trabalho de parceria entre o Sindicato dos Trabalhadores nas Indústrias da Construção e do Mobiliário de João Pessoa (SINTRICOM) e a Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Criada com o intuito de contribuir para a escolarização de um dos segmentos mais explorados da classe trabalhadora - o trabalhador da indústria da construção - a Escola desenvolve dois programas básicos: **Alfabetização na Primeira Laje** para os alunos trabalhadores com pouca ou nenhuma escolaridade e **Tijolo sobre Tijolo** (nome sugerido pelo Prof. Tek) para os alunos trabalhadores já com um certo domínio da leitura, escrita e da matemática. Na proposta do autor, a matemática e as ciências não são separadas - como é o caso no currículo tradicional - mas fazem parte de uma mesma linguagem, que é a da ciência moderna. A Escola busca uma integração entre esta linguagem da ciência e a língua portuguesa, num processo de alfabetização adequado a um mundo em que a ciência e a tecnologia estão, cada vez mais, presentes no cotidiano da vida do trabalhador.

Havia, sem dúvida, entre os alunos da Escola um interesse forte pela matemática tendo em vista sua importância na vida profissional do trabalhador: os cálculos de medida, de peso e de volume, fazem parte da rotina do canteiro de obras. Porém, os próprios professores selecionados para atuarem nos canteiros externaram a sua falta de domínio de alguns dos conteúdos do programa e de um método didático mais apropriado, que facilitasse a aprendizagem do trabalhador partindo de seu conhecimento, de sua própria experiência e da realidade da indústria.

Cabe lembrar que os trabalhadores da indústria da construção são, na sua grande maioria, oriundos do campo, não qualificados (pelos padrões urbanos), com baixa escolaridade formal, relativamente jovens e todos homens. Estas características, conjugadas com algumas especificidades da indústria – altos índices de rotatividade, baixos salários, baixos níveis de produtividade, altos índices de acidentes do trabalho- colocam desafios complexos para o processo educativo. Assim, a proposta nasceu da vontade coletiva de criar uma forma que facilitasse a aprendizagem deste aluno. O livro não deve ser visto como um manual nem muito menos como um receituário para o professor de ciências e matemática, em projetos de educação básica de adultos. Foi elaborado incorporando a experiência do projeto com o objetivo de orientar o professor, de estimular a sua criatividade e propor caminhos e não como camisa-de-força a ser aplicada ou um conjunto de regras a serem seguidas à risca.

Durante vários anos, os textos circularam dentro da equipe pedagógica do projeto em forma de manuscritos. Neste ano, em que o projeto comemora os seus dez anos de existência, desafiando a precariedade das condições que levam a maioria de projetos desta natureza a fechar as portas antes de poder se consolidar, consideramos um momento adequado para publicar o texto como livro. A nossa intenção com esta publicação é socializar uma proposta desenvolvida, originalmente, na Escola Zé Peão e, posteriormente, em outras experiências, num campo em que a literatura é bastante limitada. Esperamos que o livro possa contribuir para a formação de educadores comprometidos com uma educação popular de adultos de qualidade e para o fortalecimento da compreensão de um conceito ampliado de alfabetização que visa a contribuir para a formação de cidadãos críticos, capazes de participar na organização de sua classe e do seu sindicato, e na busca de um mundo mais justo e solidário.

Paulo Marcelo de Lima e Timothy D. Ireland
Coordenadores Gerais do Projeto
João Pessoa, julho de 2000.

INTRODUÇÃO

Este material é fruto da nossa experiência como coordenador da área de Ciências e Matemática desde 1991 na formação de professores da Escola Zé Peão, um programa de alfabetização de operários da construção civil em João Pessoa. Posteriormente, esta experiência foi enriquecida durante as aulas da disciplina Metodologia do Ensino de Ciências e Matemática por nós ministradas a partir de 1996 no Curso de Pedagogia da Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Mais recentemente, ela reflete a nossa vivência no Curso de Formação do Magistério realizado a partir de 1999 no Campus de Bananeiras da UFPB, em convênio com o Movimento dos Trabalhadores Rurais sem- Terra (MST).

Em que pese o conteúdo trabalhado referir-se primordialmente à Matemática, é importante ter sempre presente que nesta área estamos lidando com a chamada alfabetização *científica*, isto é, estamos fazendo a leitura de um mundo profundamente marcado pela ciência e que exige de nós uma ação também cada vez mais condicionada pelos desenvolvimentos tecnológicos. É por isso que juntamos Ciências e Matemática (C&M), tradicionalmente separadas nos currículos das escolas formais, numa só unidade para enfatizar que estaremos tratando aqui, não de qualquer linguagem, mas da linguagem da ciência moderna.

A aproximação dessa linguagem com a língua portuguesa será sempre perseguida não só em razão dos aspectos comuns a toda linguagem, mas, principalmente, para evidenciar as características formais da linguagem científica em oposição à linguagem comum. Por outro lado, como os conhecimentos de C&M terão que ser obrigatoriamente introduzidos através do português, oralmente no início e paulatinamente por escrito haverá a necessidade de se implementar uma *tradução* entre as linguagens. Tendo em vista que a linguagem matemática é essencialmente escrita, formalmente mais simples do que a linguagem comum, é possível avançar mais em C&M que na alfabetização propriamente dita, inclusive tomando disto partido para desenvolver o aspecto motor da alfabetização, ao fazer com que os alunos grafem números e figuras.

O princípio metodológico no qual este material se baseia é essencialmente de caráter *histórico*. Isto quer dizer que o programa de C&M procura acompanhar o desenvolvimento dos conceitos tal como ele ocorreu na história da humanidade, ressaltando os problemas concretos enfrentados pelos homens que estão na origem das soluções encontradas. A retomada desses problemas, seja na história de vida dos alunos, seja no seu cotidiano atual, servirá para ilustrar durante as aulas o conteúdo de C&M a ser trabalhado, demonstrando assim sua relevância para a vida moderna. Além disso, de um ponto de vista psicológico; a seqüência dos tópicos apresentados procura seguir as fases do seu desenvolvimento na formação do indivíduo, tal como esta é descrita pela moderna psicologia cognitiva.

Isto significa que consideramos os alunos plenamente adultos, ou seja, maduros em seu desenvolvimento sócio-psicológico para construir o conhecimento científico a partir do material proposto e incorporá-lo ao seu cotidiano. Significa também que, dadas as limitações de suas experiências com a linguagem em geral, especialmente no que se refere à escrita, vamos adaptar práticas pedagógicas largamente utilizadas na alfabetização de crianças para a educação de jovens e adultos. Para não corrermos o risco de infantilizar nossa clientela, o caráter meramente instrumental dessas práticas em toda sua concretude deverá ser sempre destacado no processo de elaboração do conhecimento mais abstrato. A diferença em relação à criança é que o concreto serve simplesmente para evocar no adulto uma experiência já vivida com vistas à sua sistematização e não para submetê-lo a uma situação artificial totalmente nova para ele.

Por sua vez, o aspecto lúdico que o ensino de C&M permite imprimir à prática pedagógica na sala de aula, principalmente através da utilização de jogos, procurará, sempre que possível, ser contemplado nessas orientações. As condições de estudo normalmente presentes na educação de jovens e adultos, via de regra deficientes no que se refere ao tempo necessário para sua concentração no trabalho escolar, são extremamente favorecidas pela descontração que essas atividades proporcionam. Afinal, o prazer estético que a ordenação do mundo pelo conhecimento científico nos pode oferecer como, por exemplo, a busca de simetria nessa ordenação, está na própria razão de ser da ciência como atividade humana.

O conteúdo deste material pode ser sintetizado em duas grandes unidades de conhecimento: *contar e medir*. A primeira unidade lida com os números naturais, suas propriedades e operações; a segunda se ocupa dos mesmos assuntos, mas em relação aos números reais ou, mais propriamente, decimais. Em virtude da generalizada utilização de calculadoras eletrônicas no cotidiano, suprimimos praticamente todo o extenso tratamento dedicado às frações no currículo tradicional, privilegiando uma abordagem das mesmas através dos números ou frações decimais utilizados pelas calculadoras.

A geometria é introduzida gradativamente no programa para aproveitar suas potencialidades de expressão gráfica. Está incluída na unidade *medir*, já que é utilizada para o estudo dos números decimais e suas operações. Proporções são apresentadas como relações entre grandezas físicas e, no decorrer do programa, são discutidas numerosas aplicações de interesse para nossos alunos como tabelas, porcentagens, cálculo de áreas, alavancas, etc.

O material de C&M foi planejado para ser inteiramente trabalhado durante um ano letivo normal, nas condições em que normalmente são desenvolvidos os programas de educação de jovens e adultos (oito a dez horas por semana). Dada a recorrência dos conteúdos trabalhados ao longo do programa, devido à sua natureza intrínseca, recomendase avançar no seu desenvolvimento, mesmo que o material não tenha sido assimilado completamente por alguns alunos. Na seqüência das aulas, eles terão oportunidade de rever e exercitar assuntos tratados anteriormente. Por outro lado, espera-se que o material seja suficientemente desafiador para não desmotivar alunos mais familiarizados com os conteúdos. De qualquer maneira, o ritmo de desenvolvimento do programa deve ser imprimido por um núcleo significativo da turma para não prejudicar a prática coletiva intencionalmente perseguida pela maioria das atividades sugeridas por este material.

O material está organizado em pequenos textos abordando o conteúdo a ser trabalhado pelo professor, em atividades para serem desenvolvidas em sala de aula e em materiais para serem trabalhados pelos alunos. Os textos não pretendem, de maneira nenhuma, esgotar os assuntos tratados. Para um aprofundamento nesses assuntos, remetemos os professores à bibliografia indicada e recomendamos fortemente que o professor tenha sempre à mão um bom livro de C&M para o ensino fundamental.

Este manual pode ser caracterizado como um *livro do professor*. Entretanto, está acompanhado de um caderno em branco, o qual irá sendo preenchido pelos exercícios, no decorrer do curso, constituindo, no final, o livro do aluno. Naturalmente, a sofisticação eventualmente presente nos textos não deve ser transferida para as atividades com os alunos. Saber o que é supérfluo e o que é essencial constitui uma norma inerente a toda atividade científica. Por isso, espera-se que os professores, ao utilizarem este material, exerçam também a prática científica que almejam ver desenvolvida entre seus alunos.

Finalmente, vale lembrar que este é um material que estará sempre em fase de reelaboração por parte de quem dele, porventura, fizer uso. Ao utilizarem-no, os professores o estarão testando. Por isso, será objeto de modificações e de melhorias, especialmente aquelas decorrentes da efetiva utilização do material em sala de aula. Com a participação dos professores e dos alunos de alfabetização de jovens e adultos, certamente construiremos subsídios melhores para outros alunos e professores que venham se engajar na prática de alfabetização em C&M e que se ressentem hoje da notória falta de materiais instrucionais nesta área.

1 CONTAR

١٢٣۴٥٦٧٨٩٠
٤٥

Um passo fundamental no processo de construção de uma linguagem escrita é a adoção de sinais que representem os objetos com os quais lida essa linguagem. Poderemos perceber bem como se dá esse processo de representação se pensarmos na situação de um surdomudo tentando se comunicar conosco. Suponhamos que ele esteja com vontade de beber água. Naturalmente, pode fazer uma mímica típica de quem quer beber água e apontar uma garrafa com água. Caso não haja nenhuma garrafa por perto, ele pode representá-la através de gestos, desenhá-la no ar ou num papel, ou até mesmo apontá-la numa propaganda de água mineral. Ao fazer isso, estará representando a garrafa com água, isto é, substituindoa por sinais que nos fazem pensar imediatamente nela e só nela; do contrário, poderíamos ser levados a concluir que ele quer beber outra coisa. Por outro lado, o gesto característico de representar o ato de beber, ao ser utilizado reiteradas vezes, acaba por simbolizar o ato de beber, ao menos no interior de uma dada comunidade.

A representação simbólica é uma manifestação humana das mais antigas – como é demonstrado pelos desenhos encontrados nas cavernas pré históricas, datados de mais de vinte e cinco mil anos– e, sem dúvida, está na origem de nossa linguagem escrita atual. Escritas anteriores às alfabéticas trazem sinais inconfundíveis de que a representação através de símbolos que procuravam reproduzir os principais atributos dos objetos representados.

também chamados pictografias ou logogramas, marca o início da longa caminhada do homem em direção à linguagem escrita que hoje utilizamos Os hieróglifos egípcios constituem um belo exemplo dessa escrita ideográfica ou logográfica.

Esta associação entre símbolo e objeto, idéia ou atividade, também está na base da construção da linguagem matemática. A Figura 1 mostra representações de objetos diversos e símbolos utilizados em nosso cotidiano.

O grau de abstração necessário para que possamos associar a figura com o que ela representa aumenta de cima para baixo, ou seja, cresce conforme nos aproximamos do final da página. Na linguagem diária, é comum tomarmos a representação do objeto pelo próprio objeto. Assim, por exemplo, ao sermos perguntados sobre o que é aquilo no canto esquerdo superior da figura, responderemos certamente que se trata de uma vaca. Todavia, consideraremos uma zombaria o fato de alguém nos pedir para tirarmos leite dela...

Na verdade, toda representação simboliza algo que, em geral, não está presente e que, portanto, não o substitui. Tomemos como exemplo o nosso sistema representativo de governo: um dos seus pressupostos básicos é que o parlamentar que elegemos nos substitui. Como sabemos, isso não passa de um mero postulado do sistema, o qual nem sempre é satisfeito.

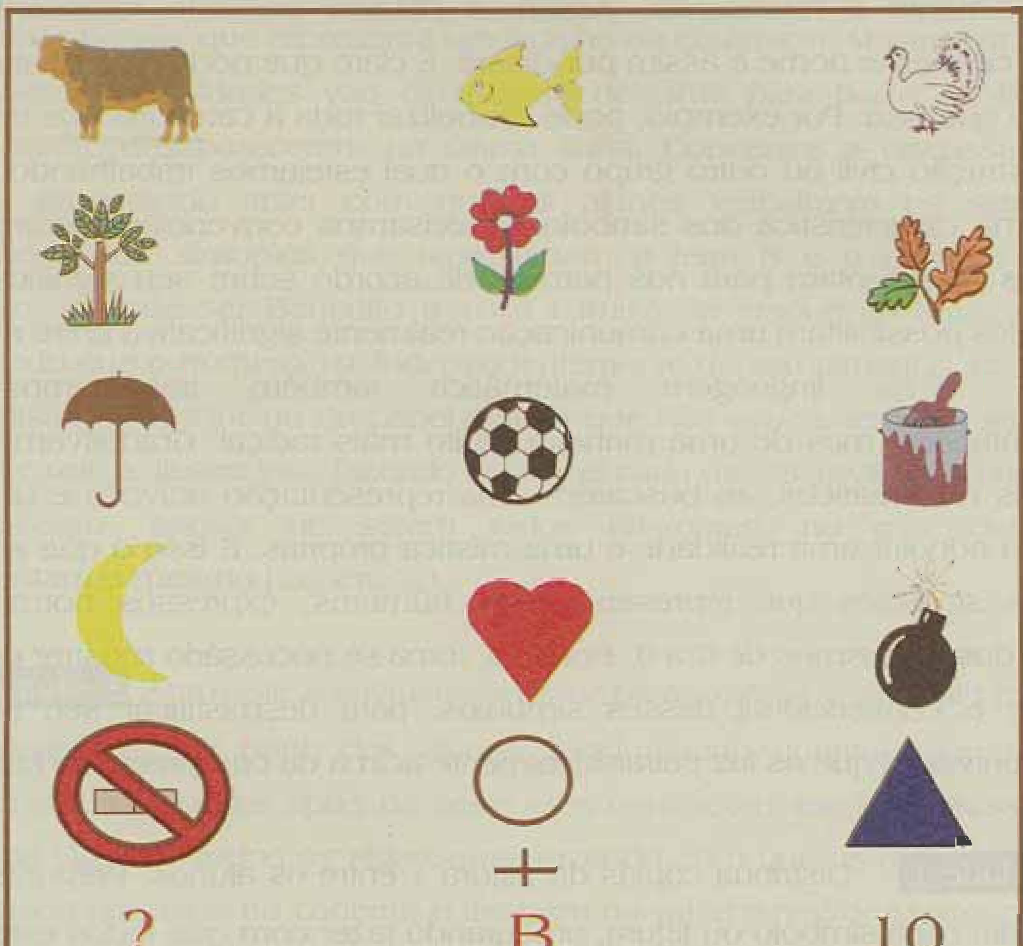


Figura 1

As necessidades sociais nos obrigam constante e insistentemente a representar. Assim, a palavra Benedito representa uma pessoa com esse nome e assim por diante. É claro que pode representar muito mais do que isso. Por exemplo, pode simbolizar toda a categoria dos operários da construção civil ou outro grupo com o qual estejamos trabalhando. Esta é mais uma característica dos símbolos: precisamos convencionar entre nós o que eles representam para nos pormos de acordo sobre seu significado. Só assim eles possibilitam uma comunicação realmente significativa entre nós.

Na linguagem matemática também trabalhamos com representações, mas de uma maneira muito mais radical. Gradativamente, os símbolos matemáticos, ao buscarem uma representação unívoca e universal, parecem adquirir uma realidade e uma mística próprias. É isso o que acontece com os símbolos que representam os números, expressos normalmente através dos algarismos de 0 a 9. Por isso, torna-se necessário mostrar o caráter histórico e convencional desses símbolos, para desmistificar seu pretenso caráter universal que os faz pairar idealmente acima da compreensão humana.

Atividade 1. Distribua cópias da Figura 1 entre os alunos. Pergunte o que representa cada símbolo ou figura, procurando fazer com que todos estejam de acordo. Discuta as limitações de tamanho e de cor das representações e as diferentes escalas utilizadas (por exemplo, a bola é quase do tamanho da vaca). Analise com os alunos tudo que se pode falar sobre os atributos das coisas representadas (por exemplo, a vaca é malhada, talvez holandesa) e a dificuldade de se pôr de acordo sobre alguns desses atributos (por exemplo, alguém pode achar que o triângulo representa um triângulo de tocar forró e outro pode pensar que representa um ladrilho de cerâmica). Mostre como essas limitações e dificuldades vão diminuindo de cima para baixo na figura até praticamente desaparecerem na última linha. Concentre a discussão nessa direção procurando fazer com que os alunos verbalizem os significados associados aos símbolos que representam a letra B e o número 10 (por exemplo, B pode ser Benedito e 10 a camisa do craque do time). Conclua mostrando que o número 10, independentemente do seu tamanho, da sua cor, da camisa do jogador ou do papel-moeda que nos evoca, tem um significado próprio e único. Ilustre isso fazendo com que cada um escreva o número 10 no quadro-negro: apesar de serem todos diferentes, no essencial, todos representam o mesmo número 10.

Atividade 2. Aproveite a atividade anterior para verificar o domínio da escrita dos algarismos por parte dos alunos. Perguntando quantos animais estão representados, quantos tipos de peixe eles conhecem, etc. o professor pode extrair da Figura 1 todos os algarismos, fazendo com que os alunos escrevam os diversos números no caderno e também no quadro-negro. Assim, poder-se-á avaliar o modo como eles grafam os diversos algarismos. Esta é apenas uma atividade exploratória do domínio da escrita dos algarismos que deverá subseqüentemente ser desenvolvida. Caso seja necessário, para os alunos com maior dificuldade, passe exercícios sistemáticos de caligrafia (do tipo utilizado para as letras do alfabeto).

1.1 NÚMEROS

Números podem ser concebidos como o resultado de contar objetos. Para podermos fazer isso, precisamos definir, inicialmente, uma unidade. Isso, por sua vez, pressupõe que façamos a divisão dos objetos em classes, de modo que possamos distinguir aqueles que estamos contando daqueles que são, de alguma forma, diferentes. Classificar objetos é uma atividade constante na ciência e, muitas vezes, é ela que problematiza situações que fazem o conhecimento avançar. Foi assim que Darwin, analisando os inúmeros problemas de classificação das espécies de seu tempo, formulou a sua teoria da evolução. A busca de diferenças e semelhanças, fundamental no processo de classificação, é uma operação primordial no processo de ordenação do mundo; são as exigências por ela colocadas que nos desafiam a aprofundar nosso conhecimento sobre as coisas.

Ordenar, ou seja, estabelecer relações de ordem entre objetos foi uma das primeiras tarefas desenvolvidas pela atividade humana de comunicação. Dentro, fora, maior, menor, ontem, cedo, mais tarde, são exemplos de conceitos utilizados na linguagem cotidiana para ordenar no tempo e no espaço objetos ou eventos. Essa ordenação do mundo que nos rodeia constitui o primeiro passo na organização de nosso conhecimento: é a partir daí que começamos a ter ciência acerca deste mundo, isto é, passamos a ter um conhecimento organizado dele. Nos dias atuais, seria praticamente impossível viver sem esse conhecimento. É por isso que os alunos já dominam estas relações de ordem e as utilizam no seu dia-a-dia. Naturalmente, esses conceitos são fundamentais para o desenvolvimento deste programa. Com o objetivo de verificar o domínio do vocabulário relativo a esses conceitos é que propomos as seguintes atividades.

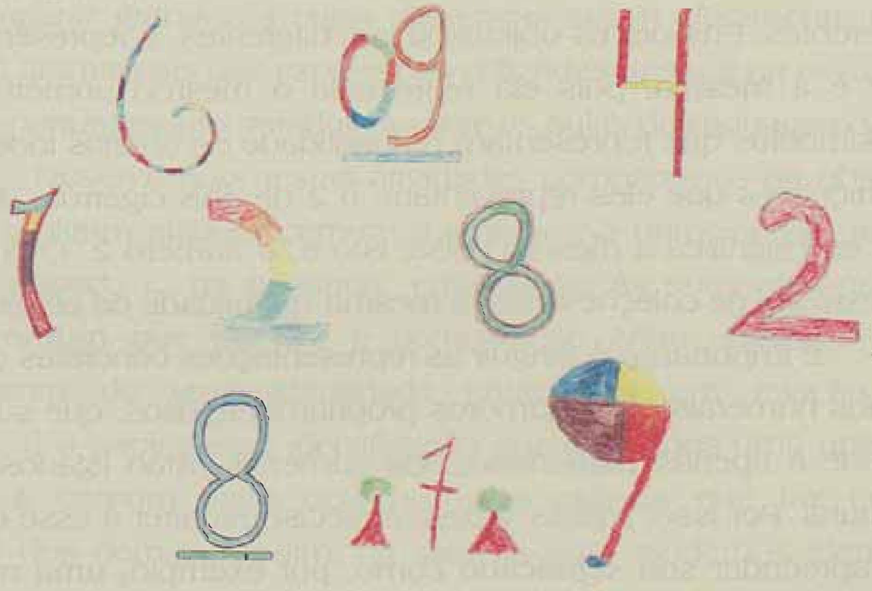
.Atividade 3. Este exercício deve ser conduzido de forma totalmente oral e com a participação de todos os alunos. Trata-se de solicitar a eles que utilizem as expressões em cima, em baixo, na frente de, atrás de, ao lado de, dentro, fora, à direita, à esquerda, etc. A própria sala de aula será utilizada para que os alunos verbalizem essas expressões através de respostas a perguntas formuladas pelo professor, do tipo: Você está na frente de quem? Ao lado de quem? Quem está à sua direita? Onde está o caderno? O professor pode imprimir uma dinâmica ativa na classe fazendo circular objetos entre os alunos solicitando que eles os coloquem em baixo das carteiras, passem para o colega de atrás, para o da direita, etc. Observe que tratamos neste exercício de relações de ordem no espaço tridimensional e é o domínio destas relações pelos alunos que está sendo verificado.

Atividade 4. Neste exercício, também oral, solicitamos aos alunos que estabeleçam comparações entre objetos. Começamos com o comparativo *mais*. Por exemplo, relativamente à altura: Quem é mais alto, quem é mais baixo? Dessa forma, podemos ordenar todos os alunos com relação à altura do mais baixo para o mais alto e vice-versa. Em seguida, introduzimos os superlativos maior e menor para designar, respectivamente, o mais alto e o mais baixo da turma. Podemos multiplicar as situações tomando o tamanho dos dedos da mão, a altura dos edifícios etc. Repetimos o exercício, agora com as expressões grosso/fino, curto/comprido, largo/estreito, aplicando-as a objetos tais como lápis, tijolos, janelas, portas, cabelos, etc., procurando sempre comparar grandezas cujas diferenças sejam claramente perceptíveis. Os aspectos gramaticais das expressões utilizadas nesta e na atividade anterior devem ser oportunamente tratados durante as aulas de linguagem verbal.

Observe que nestas atividades comparamos os objetos entre si em relação a algum atributo comum a ambos. Na primeira, em relação à sua posição no espaço e, na segunda, em relação às suas dimensões. É esta qualidade comum que permite a comparação entre objetos e o eventual estabelecimento de uma identidade entre eles em relação a alguma propriedade. É a partir dessa identificação que definimos uma unidade, isto é, aquilo que é comum entre dois ou mais objetos que faz com que os distingamos dos demais. Assim, na sala de aula, podemos identificar várias pessoas, todas elas tendo as propriedades comuns aos seres humanos. Esta unidade é que permite que as contemos como elementos de um mesmo conjunto. Se agora restringirmos mais esse conjunto tomando apenas, por exemplo, pessoas do sexo masculino, então uma determinada pessoa será incluída, ou não, na contagem, dependendo do seu sexo.

Atividade 5. Faça uma série de perguntas sobre o número de pessoas e objetos existentes na sala de aula. Quantas cadeiras? Quantos nordestinos? Quantos pedreiros? Quantos casados? Mostre que é necessário que todos estejam de acordo sobre o que significa cadeira, nordestino, pedreiro, casado, etc, para que possamos responder estas questões. Provavelmente, na atividade anterior apareceram números iguais representando a mesma quantidade de objetos diferentes. Embora os objetos sejam diferentes, a representação de sua quantidade é a mesma, pois ela representa o mesmo número de objetos. Assim, os símbolos que representam a quantidade de objetos independem dos objetos particulares que eles representam: o 2 de dois cigarros, duas cadeiras, dois tijolos etc, significa a mesma coisa, isto é, o número 2. O número é uma abstração extraída de coleções com a mesma quantidade de objetos.

É importante distinguir as representações concretas dos números- os chamados numerais - dos números propriamente ditos, que são abstrações cuja realidade é apenas matemática. Os numerais estão ligados ao contexto social e cultural. Por isso, muitas vezes, é preciso recorrer a esse contexto para podermos apreender seu significado como, por exemplo, uma mão de milho (cinqüenta e duas espigas), uma pataca (trezentos e vinte réis), um barão (mil cruzeiros), um tostão (cem réis), uma dúzia (doze unidades) etc. Por sua vez, quando esses numerais extrapolam seus contextos originais, eles podem adquirir um significado universal, como acontece com os algarismos romanos utilizados até hoje. A Figura 2 mostra como os numerais básicos de 0 a 9, utilizados atualmente, evoluíram no decorrer do tempo, desde sua criação pelos hindus e sua introdução na Europa pelos árabes, a partir do século XII.



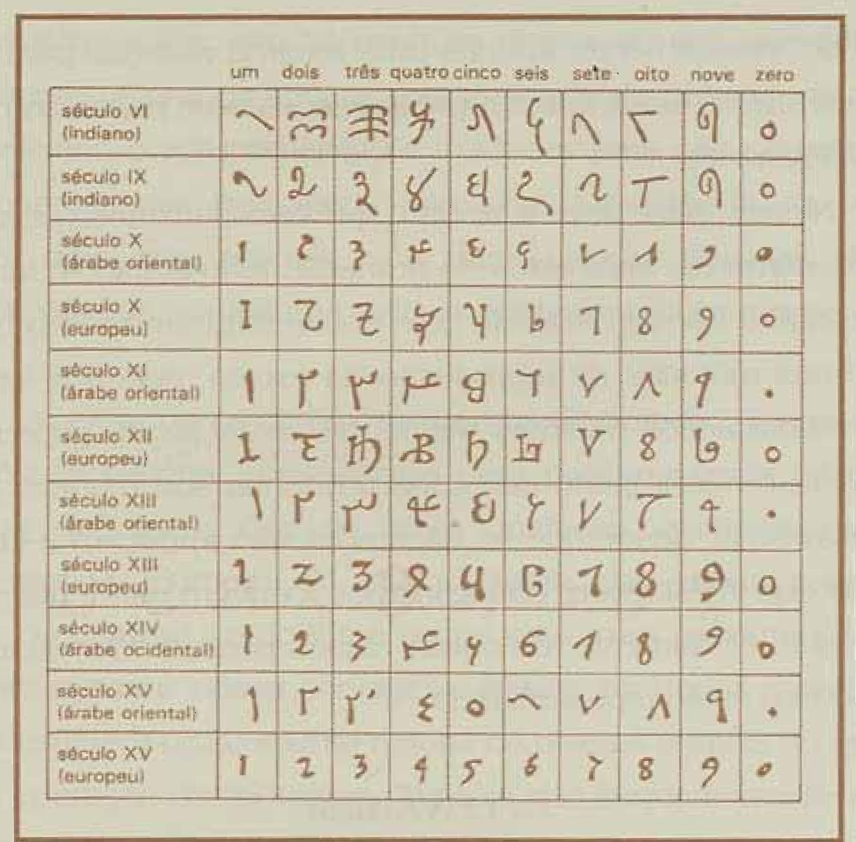


Figura 2

Atividade 6. Faça um levantamento das diversas formas de indicar quantidades, orais e escritas, conhecidas dos alunos. Exemplos: dois, 2, trinca, III, par, grosa. Mostre que essas representações de quantidades podem ser todas simbolizadas através da utilização dos algarismos de 1 a 9. Em seguida, discuta com os alunos a variedade de alfabetos utilizados no mundo e o uso generalizado de, praticamente, apenas uma mesma notação para os números (os hindus e os árabes ainda usam representações bem próximas das notações mostradas na Figura 2).

Neste ponto, deve ficar claro que os algarismos que usamos para representar os números, chamados de numerais indo-arábicos, também têm a sua história e que a homogeneidade hoje encontrada em todo o mundo deve-se aos modernos métodos de reprodução da escrita, podendo-se afirmar que eles tiveram modificações mínimas depois da invenção da imprensa, no final do século XV. Isso não impede que cada um tenha sua maneira particular de grafar cada algarismo, desde que as diferenças não impeçam a comunicação. Para os alunos que já escrevem os algarismos, convém não tentar padronizar a escrita desde que, obviamente, os outros alunos possam identificar claramente qual algarismo eles estão representando.

1.2 CONTAGEM

Uma vez que estejam definidas as unidades, isto é, que saibamos exatamente qual conjunto de objetos vamos considerar, podemos começar a contar. É importante ter em mente que contamos de um em um, de unidade em unidade, sucessivamente. Em certo sentido, podemos dizer que a contagem só é efetiva quanto contamos mais de um objeto, isto é, a contagem começa com dois. Só depois, por extensão, consideramos que começamos a contar a partir do um e, generalizando ainda mais, a partir do zero, ou seja, quando constatamos que não há nenhum objeto, do tipo que definimos, para contar. Entretanto, à proporção que a quantidade de objetos vai aumentando, torna-se necessário o agrupamento de unidades para não se perder na conta. De fato, é comum nas linguagens primitivas a existência de palavras para designar um, dois, três objetos e, a partir daí, as pessoas designarem a quantidade de objetos por alguma palavra equivalente: um monte, muitos, uma porção.

Analisando os diversos sistemas de notação desenvolvidos pelos povos através da história, constatamos uma predominância da existência de agrupamentos de cinco, dez ou vinte unidades. Naturalmente, isso está relacionado com o número de dedos, tanto das mãos como dos pés. Literalmente, o conjunto de dedos é o que está mais próximo para podermos concretamente registrar nossa contagem. Assim, os dedos, principalmente os das mãos, constituem um conjunto natural de objetos através do qual podemos memorizar a operação de contagem. Tanto é que freqüentemente recorremos a eles quando temos dificuldade de registrar nossas contagens. Todavia, a contagem com os dedos não permite um registro permanente dos números. Para isso, os diversos povos fizeram uso generalizado de riscos ou entalhes em ossos, pedras etc, como atestam diversos achados arqueológicos desse registro rudimentar do resultado de contagens. Esse sistema, de certo modo, persiste até hoje para contagens especiais, como aquelas que se estabelecem fazendo-se marcas nas coronhas dos revólveres...

Atividade 7. Utilizando pedrinhas, tampinhas, sementes ou palitos de fósforo, peça para os alunos fazerem a contagem de um conjunto que tenha menos de dez objetos. Faça a equivalência dos números assim obtidos com os dedos das mãos. Faça a correspondência uma a uma entre as várias unidades de contagem utilizadas, mostrando que elas expressam a mesma quantidade. Na linguagem matemática, dizemos que, assim procedendo, estamos estabelecendo uma *correspondência biunívoca* entre esses vários conjuntos.

Atividade 8. Conte com os alunos, com a ajuda dos dedos das mãos, objetos na sala de aula que não ultrapassem nove unidades. Em seguida, conte os objetos registrando a contagem no quadro - negro da forma seguinte:

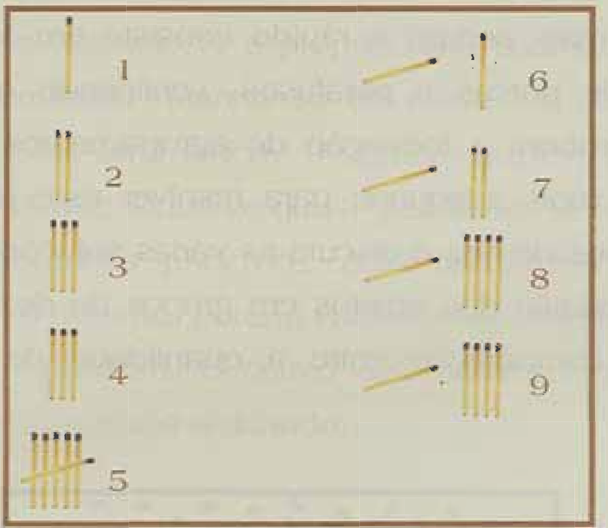


Figura 3

Observe que agrupamos na figura cinco objetos, substituindo-os por um traço diagonal na representação de números superiores a cinco, para simplificar a notação e sistematizar a contagem (a esta altura, os alunos devem ser capazes de ler e escrever os algarismos de um a nove; caso isso não aconteça, passe exercícios de caligrafia pedindo para os alunos escreverem, do menor para o maior, os números 7, 2 e 8 e outros exercícios semelhantes).

Atividade 9. Dê a cada aluno uma cópia da Figura 4 e pergunte se há mais porcas do que parafusos no desenho (há cento e vinte e nove porcas e cento e onze parafusos desenhados). Deixe os alunos argumentar, fazendo com que justifiquem suas respostas. Existem várias maneiras de resolver o problema.

porém o método mais seguro e rápido consiste em formar grupos com o mesmo número de porcas e parafusos, verificando quantas porcas ficam sobrando. Muito embora a formação de agrupamentos com dez elementos talvez não seja a mais adequada para resolver este problema, introduza a contagem em grupos de dez e discuta as várias soluções apresentadas. Deve ficar claro que a reunião dos objetos em grupos de dez ou outro número de objetos facilita a comparação entre a quantidade de porcas e parafusos existente na figura.

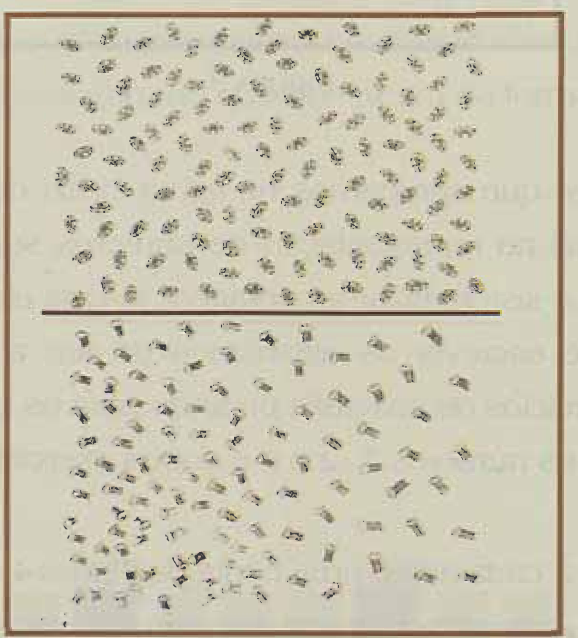


Figura 4

Além de estabelecer a propriedade, chamada cardinalidade, de expressar uma determinada quantidade de coisas, a contagem através de números guarda também uma ordem: o número um é o primeiro, o dois é o segundo e assim por diante. Observe que a quantidade de coisas independe da ordem em que são contadas; podemos contar os objetos a partir de qualquer um que o resultado é o mesmo. Porém, cada número exprime a ordem na qual foi contado: se foi o primeiro, o oitavo etc. Dizemos que o conjunto dos números naturais é um conjunto ordenado.

Atividade 10 Comece por perguntar quem é o mais velho da turma. Em seguida, anote as idades dos alunos e as ordene da menor para a maior. Caso haja pessoas com a mesma idade, discuta com os alunos o significado de contar os anos de vida e elimine as dúvidas que houver sobre quem é mais velho ou mais novo. Ordene em seguida os anos em que nasceram seus alunos mostrando que se obtém a mesma ordem anterior. Desafie seus alunos a encontrar, dados o dia e o ano em que alguém nasceu e o dia do ano em curso, a idade em anos da pessoa neste dia. Mostre que a ordem dos números sempre se mantém: cada sucessor de um número é sempre maior que o anterior, independentemente de onde se comece a contar, porque a contagem se faz sempre de um em um.

1.3 O ÁBACO

Neste ponto do desenvolvimento do programa, damos como certo o entendimento de que há uma correspondência um a um entre os objetos e os traços ou dedos no processo de contagem. É esta correspondência biunívoca que permite a representação do número de objetos através de algarismos ou dígitos (do latim *digitus*, dedo). Além dos diversos sistemas de notação criados nas diferentes civilizações para representar quantidades, também foram desenvolvidas técnicas para operar com elas, isto é, para calcular (do latim *calculus*, pedrinha). Antes do aparecimento de nosso sistema atual de calcular, foram criados diversos artifícios para realizar cálculos, uma vez que os sistemas antigos de notação não se prestam para isso (por exemplo, utilizando algarismos romanos, experimente somar XIV com XVI para obter o resultado XXX). Estas técnicas podem ser todas sinteticamente remetidas a um instrumento chamado ábaco e que foi intensamente utilizado, numa ou noutra versão (todas equivalentes em princípio), pelos povos antigos para realizar cálculos. O ábaco ainda é usado principalmente pelos povos orientais (*soroban*).

Nossa versão do ábaco consiste de uma moldura de madeira na qual estão dispostos horizontalmente quatro arames em cada um dos quais estão presas dez argolas de madeira que podem se deslocar livremente ao longo de cada arame. Naturalmente, dentro das condições do programa de alfabetização, esse ábaco poderá ser construído de outra forma e inclusive trabalhado na forma vertical (por exemplo, com argolas que se encaixam em eixos verticais). Neste texto, representaremos o ábaco conforme a figura abaixo:

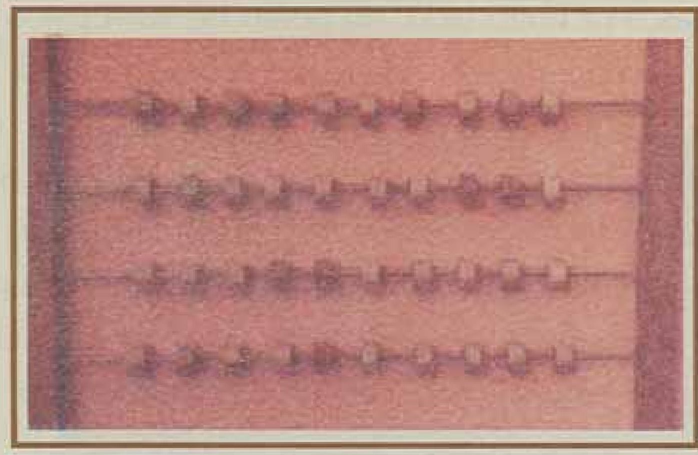


Figura 5

O ábaco constituirá um instrumento de trabalho do professor em sala de aula durante bastante tempo. Por isso, o professor deve familiarizar-se muito bem com ele antes de utilizá-lo. Geralmente, o ábaco é um objeto estranho tanto para os alunos como para o professor, a começar pela sua denominação. O nome *ábaco* provavelmente vem da palavra semítica abq, que significa *pó*, indicando que sua versão original consistia de uma bandeja de areia onde eram grafadas através de traços as quantidades objeto de cálculos. Este aspecto público do ábaco, o qual permite que se possa acompanhar os cálculos realizados pelo operador, não deve ser perdido de vista pelo professor quando de sua utilização em sala de aula. Assim, é importante que o ábaco esteja disposto sobre a mesa de tal maneira que todos possam acompanhar as operações realizadas. Por outro lado, do ponto de vista psico-pedagógico, sua utilização permite a concretização das operações mentais realizadas pelos alunos e, por isso, é fundamental que todos tenham a oportunidade de manipulá-lo. Cabe observar, no entanto, que, muito embora o ábaco constitua um sistema de calcular rudimentar, não é esta sua finalidade de utilização em sala de aula. Simplesmente, ele concretiza um estágio necessário no processo de expressão das operações mentais, já dominadas pelos alunos, para uma linguagem escrita abstrata, objetivo último da alfabetização. Dessa forma, o ábaco ilustrará contas simples; para cálculos mais complexos, faremos uso das modernas calculadoras eletrônicas de bolso.

Atividade 11 Apresente o ábaco para seus alunos descrevendo as suas partes e mostre como ele pode substituir a contagem feita com traços realizada na atividade 8. Tal como naquela atividade, faça a contagem de objetos cujo número não seja superior a nove. Para isso, utilize o arame inferior do ábaco deslizando as argolas da esquerda para a direita. Nesse procedimento, devem constar os seguintes passos: contagem mental dos objetos, representação concomitante do número de objetos no ábaco, escrita do número no quadro e, finalmente, escrita do número nos cadernos. Em seguida, ainda no arame inferior, disponha diferentes números de argolas, peça para os alunos verbalizarem os números assim representados (chame os alunos para realizarem a contagem das argolas no ábaco de modo a verificarem o resultado) e para escreverem os números nos cadernos. Faça o mesmo no quadro-negro, conforme o exemplo abaixo.

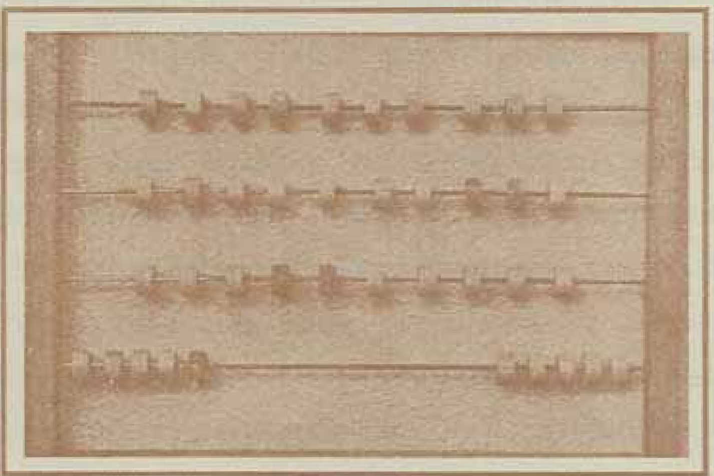


Figura 6

Chame a atenção dos alunos para o fato de que é preciso colocar todas as argolas do lado esquerdo, antes de iniciar a contagem. Pergunte então se, nessa posição, o ábaco está representando algum número. Nada, nenhum e talvez zero, poderão ser as respostas dos alunos. Aproveite então para introduzir ou destacar o número zero, escrevendo o algarismo correspondente no quadro e dizendo que esse número pode representar, por exemplo, o número de papagaios na sala de aula. Em seguida, mostre a necessidade de zerar o ábaco antes de realizar uma contagem, isto é, começar do zero representado pelo posicionamento de todas as argolas do lado esquerdo.

1.4 SISTEMA POSICIONAL DE NOTAÇÃO

Chegamos agora à parte mais importante referente aos números naturais, que é a possibilidade de representar os números utilizando um sistema posicional de base dez. Isto significa que podemos representar qualquer contagem, por maior que ela seja, utilizando apenas os nove algarismos e mais o zero introduzido na atividade anterior. É importante levar em conta que o sistema posicional, no qual o papel do zero é fundamental, foi uma longa conquista da humanidade e que o seu uso generalizado em nossa civilização data de apenas cerca de mil anos. Seu princípio básico consiste no fato de que o valor numérico de um algarismo depende de sua posição na representação do número. Assim, por exemplo, no número 11, o primeiro dígito representa dez unidades enquanto o segundo apenas uma. Do mesmo modo, no número 111, o primeiro algarismo está representando uma centena, ou seja, dez dezenas, porque o nosso sistema posicional é decimal, ou de base dez. Assim, à medida que o algarismo se move da direita para a esquerda, ele passa a ter um valor dez vezes maior de casa em casa. Observe que, ao contrário de nossa escrita alfabética, a representação do número é construída da esquerda para a direita, enquanto sua leitura é feita da direita para a esquerda, do mesmo modo que se lêem as palavras. Isto está ligado às diferentes origens de nossos sistemas de escrita dos números e das palavras. Heródoto, no século V a.C, notou que *"os egípcios movem a mão da direita para a esquerda para calcular, enquanto que os gregos a movem da esquerda para a direita"*. De qualquer maneira, não resta dúvida de que o uso extensivo de ábacos semelhantes ao utilizado aqui contribuiu para a construção do sistema posicional devido às semelhanças entre as duas formas de representação, conforme iremos ver mais adiante. É por isso que, de acordo com nossa proposta metodológica, é fundamental o uso do ábaco para a compreensão de nosso sistema de numeração e, conseqüentemente, para a aprendizagem da linguagem matemática envolvendo números naturais.

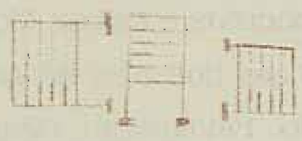
.Atividade 12. Neste momento, os alunos devem estar suficientemente interrogativos sobre as argolas nos arames superiores do ábaco. Explique-lhes que, tal como fizeram os antigos, podemos convencionar que cada argola num arame superior vale dez vezes mais do que uma que está no arame imediatamente abaixo. Dessa forma, o primeiro arame representa as unidades, o segundo as dezenas, o terceiro as centenas e o quarto os milhares, uma vez que uma dezena tem dez unidades, uma centena tem dez dezenas e um milhar tem dez centenas, conforme é ilustrado na figura abaixo:

Figura 7

Construa no ábaco configurações semelhantes para a centena e para o milhar, mostrando que o princípio é o mesmo e que pode ser estendido infinitamente, desde que aumentemos também o número de arames. Faça agora uma série de representações no ábaco de números maiores do que dez e menores do que cem, usando a equivalência exemplificada na Figura 7. Note que este exercício deve ser feito de forma a não representarmos ainda os números na notação decimal. Como os romanos!

Atividade 13. Faça agora contagens com números entre dez e vinte no ábaco e represente-os no quadro-negro na notação decimal, com a participação dos alunos. Enfatize a identidade essencial entre a representação dos números no ábaco e sua notação decimal. Em seguida, faça o exercício inverso pedindo que os alunos representem no ábaco números entre dez e vinte. Note que a representação no ábaco deve ser construída de argola em argola como se estivéssemos efetuando uma contagem. Estenda gradativamente o exercício para números maiores que vinte e menores que cem e assim por diante, até chegar ao milhar. À medida que os alunos forem percebendo a equivalência entre as dezenas, centenas etc, com a posição dos algarismos no número, não será mais necessário contar de argola em argola. Neste ponto, passe para a atividade seguinte.

Atividade 14 A partir da atividade anterior, os alunos começam a associar a posição do algarismo no número com o arame correspondente no ábaco. Faça essa correspondência explicitamente como, por exemplo, está mostrado na figura a seguir para o número que representa o ano de 1998.



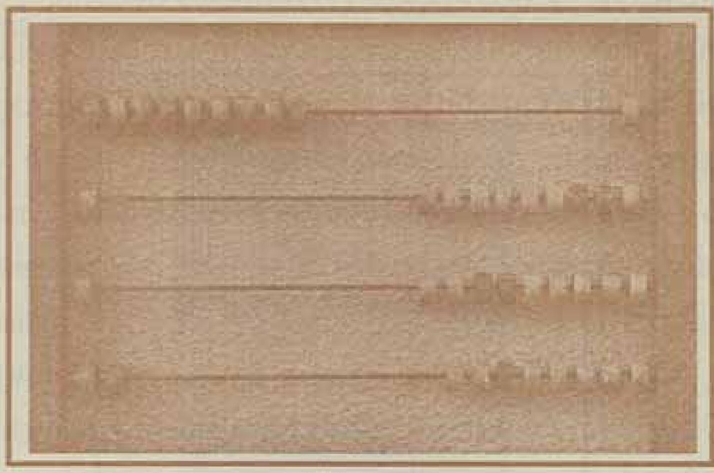


Figura 8

Insista nesta atividade até os alunos perceberem completamente o sistema posicional, de modo a distinguirem claramente no ábaco a diferença entre os números 23, 203, 230, 2003, 2030 e 2300, por exemplo. Como na atividade anterior, proceda gradativamente dos números menores para os maiores. Durante o exercício, associe também o sistema posicional com a verbalização ou leitura dos números. Por exemplo, o número 3505 (três mil e quinhentos e cinco). Mostre que os zeros não são lidos exatamente porque eles indicam que não há nenhum valor correspondente àquela posição onde eles estão. Finalmente, destaque o poder de representação do sistema posicional, observando que, fazendo uso de apenas dez algarismos, ele permite a representação de qualquer número por maior que seja.

.Atividade 15. O sistema monetário nacional é também um sistema de base decimal, tendo o centavo como unidade. Represente no ábaco as moedas do real, lembrando que um real é igual a cem centavos.

.Atividade 16. Como discutimos anteriormente, há razões históricas e antropomórficas que nos fazem utilizar a base dez. Outras bases foram utilizadas no decorrer da história, como a base doze, remanescente nas expressões como dúzia e grosa, a qual foi usada devido à facilidade de cálculos que proporciona. Fixando, inicialmente, as argolas das extremidades, mostre que como, se poderia contar utilizando o ábaco, poder-se-ia contar empregando-se a base nove. Passe em seguida para bases menores, chegando até a base dois, na qual só precisaremos de dois algarismos para representar qualquer número. Mostre como, acendendo ou apagando lâmpadas que estão em fila, podemos representar um número. Em seguida, discuta a utilização de chaves que abrem ou fecham circuitos como a base de contagem dos modernos computadores.

1.5 DECOMPOSIÇÃO DE UM NÚMERO

A construção dos números naturais pode ser realizada adicionando-se unidades sucessivamente. Assim, por exemplo:

$$
\begin{aligned}
7 &= 6 + 1\\
&= 5 + 1 + 1\\
&= 4 + 1 + 1 + 1\\
&= 3 + 1 + 1 + 1 + 1\\
&= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1\\
&= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}
$$

Dessa forma, qualquer número natural pode ser escrito como uma soma de unidades. Por extensão, podemos expressar qualquer número como uma soma de parcelas de diferentes ordens. Por exemplo:

$$35 = 30 + 5$$

$$435 = 400 + 30 + 5$$

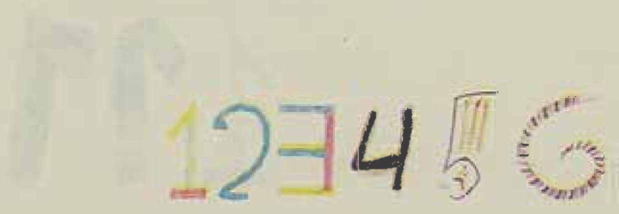
operação esta implicitamente utilizada na representação dos números no ábaco.

Atividade 17. Começando com números entre 10 e 100, escreva um número no quadro-negro, peça para os alunos o escreverem nos cadernos e represente-o no ábaco. Em seguida, peça para os alunos escreverem os números que vêm imediatamente antes e depois na seqüência, pedindo em seguida que eles representem esses números no ábaco. Exemplo: 52 - 53 - 54. Associe este exercício com os prêmios do jogo da "sena". Insista com os alunos utilizando números finalizados pelos algarismos 9, 0 e 1, para verificar seu domínio do sistema posicional. Em seguida, escreva igualdades do tipo:

$$54 = 53 + 1 \qquad\qquad 53 = 54 - 1$$

explicando o significado dos símbolos = + - . Finalmente, faça algumas decomposições de números mostrando como elas estão relacionadas com a leitura desses números.

Exemplo: 527 = 500 + 20 + 7 (quinhentos e vinte e sete)



ADIÇÃO

Pelo item anterior, deve ter ficado claro que a operação de adição já está implícita na própria construção do conjunto dos números naturais, isto é, este conjunto, pela própria maneira de sua construção, é dotado de uma operação com as propriedades da adição. Isto significa que, uma vez percebendo o modo como o conjunto é construído, o aluno deve ser capaz de somar números conceitualmente. A dificuldade operatória é uma questão meramente técnica e, por isso, é importante caminhar passo a passo com a adição para que o aluno compreenda as diversas técnicas envolvidas sem esquecer que, hoje em dia, as adições mais complicadas são realizadas com calculadora.

2222

Atividade 1. Construa junto com os alunos a tabuada de somar abaixo.

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Para a construção desta tabela, realize junto com os alunos as operações:

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 + 0 = 1$ $\quad$ $2 + 0 = 2$

$0 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 1 = 2$ $\quad$ $2 + 1 = 3$

$0 + 2 = 2$ $\quad$ $1 + 2 = 3$ $\quad$ $2 + 2 = 4$

e assim por diante.

Estas operações devem ser indicadas na tabela e, a partir de um certo momento, realizadas mentalmente pelos alunos. Caso haja dúvidas, utilize o ábaco, principalmente quando o resultado da soma for maior do que 10. Assinale os resultados na tabela previamente desenhada no quadro-negro. Depois de ter sido construída em conjunto com os alunos, estes podem reproduzi-la no caderno. É interessante fazer a tabela numa cartolina grande, a qual será afixada na sala de aula, para uso posterior.

No decorrer da atividade anterior, devem ser salientadas as propriedades da adição:

$$a + 0 = 0 + a = 0 \text{ (elemento neutro)}$$

$$a + b = b + a \text{ (comutativa)}$$

que surgem naturalmente na construção da tabela, sem que seja preciso nomeá-las formalmente. De resto, as regularidades e as simetrias da tabela devem ser apontadas e exploradas, mostrando que elas permitem a extensão da tabela para todos os números. Na verdade, ela pode ser vista como uma apresentação do princípio da adição sucessiva de unidades para a construção dos infinitos números. Além disso, como a tabela mostra a adição de todas as somas possíveis dos números representados pelos algarismos de 0 a 9, ela permite, em princípio, realizar a adição de quaisquer números naturais.

Atividade 2. Uma característica dessa tabela é que ela tem a forma do que se chama uma tabela de dupla entrada. Isto é, entrando com dois números quaisquer m e n, a tabela fornece a soma m + n. Aproveite este fato para explorar outros tipos de tabelas conhecidas dos alunos como calendários, horários de trabalho, tabelas de salários, ou traga tabelas existentes nos jornais para que os alunos realizem sua leitura correta.

Atividade 3. Para facilitar a memorização e o domínio da tabuada, peça para os alunos realizarem mentalmente somas de números cujo resultado varie entre 3 e 9. As perguntas podem também ser feitas entre eles. Outra variante deste exercício consiste em perguntar, dado um número entre 3 e 9, quais são os pares de números cuja soma é igual ao número dado.

Para a realização de operações com números de vários algarismos, foram criados certos esquemas chamados pelos matemáticos de *algoritmos*, cujo domínio faz parte de nossos objetivos. Assim, o conhecido esquema:

$$\begin{array}{r} 55 \\ +\,37 \\ \hline 92 \end{array}$$

expressa o algoritmo da adição. Dizemos também que dessa maneira "armamos" a conta de adição. Todo algoritmo tem a sua justificação matemática rigorosamente demonstrada. Porém, mais do que o domínio do algoritmo, a ênfase aqui deve ser colocada na compreensão da operação.

Assim, por exemplo, podemos realizar a soma anterior decompondo os números desta forma:

$$55 = 50 + 5$$
$$37 = 30 + 7$$

Logo, a soma anterior pode ser assim escrita:

$$\begin{aligned} 55 + 37 &= 50 + 5 + 30 + 7 \\ &= 80 + 12 \\ &= 92 \end{aligned}$$

Com esta compreensão e o uso da calculadora, os alunos não encontrão dificuldades em realizar somas de grandes números e muitas parcelas, sem que seja necessário o exercício monástico de realizar, a mão, contas complicadas.

Atividade 4. Pegue um jogo de dominó e some junto com os alunos os pontos em cada pedra. Ressalte o elemento neutro e a comutatividade, isto é, que a soma dos pontos de uma pedra independe da ordem na qual fazemos a adição. Procure agrupar pedras cuja soma é a mesma, como aquelas que têm os valores 4 e 2, 0 e 6, 5 e 1, 3 e 3, nas quais a soma é sempre 6. Discuta estes resultados com os alunos, confrontando-os com as estratégias utilizadas por eles quando jogam dominó.

Atividade 5. Pegue um baralho separando as cartas de 2 a 10, mais os ases aos quais atribua o valor um. Distribua duas cartas para cada um e diga que o objetivo do jogo é aproximar-se o máximo possível do número quinze: este é o jogo do *quinze*. Em seguida, cada jogador decide se quer uma ou mais cartas. Ganha quem chegar mais próximo do quinze. Quem ultrapassar esse número será eliminado. Este é um jogo para quatro ou seis pessoas e pode ser realizado com um grupo de alunos com dificuldades na adição. Também pode ser realizado com um grupo adiantado que deverá assim investigar as melhores estratégias para se ganhar nesse tipo de jogo. Neste último caso, pode ser sugerido que os alunos apresentem alternativas para se jogar este jogo.

Nas atividades 4 e 5, trabalhe tanto com a notação, que daqui por diante chamaremos de horizontal, isto é $5 + 3 = 8$, como "armando" a conta, a que chamaremos de notação vertical, voltando ao uso do ábaco em caso de dificuldades. Embora a notação vertical seja extremamente importante como técnica operatória, a notação horizontal deve ser enfatizada devido à sua utilidade posterior para a tradução de problemas em linguagem matemática. Ou também para indicar as operações quando, em vez do algoritmo da adição, utilizamos uma calculadora para realizar a soma.

Para os alunos que ainda têm dificuldade com a soma de dois algarismos, utilize o artifício seguinte. Primeiro, esteja certo de que os alunos não têm dificuldades com as adições do tipo $10 + x$, onde x pode ser qualquer número de 1 a 9. Em seguida, reduza as somas propostas a adições deste tipo, como é mostrado no exemplo abaixo:

$$\begin{array}{c} 7 + 8 \\ 7 + 3 + 5 \\ 10 + 5 \\ 15 \end{array} \qquad \text{ou} \qquad \begin{array}{c} 7 + 8 \\ 5 + 2 + 8 \\ 5 + 10 \\ 15 \end{array}$$

Na sua essência, estes esquemas tentam reproduzir as operações que realizamos quando efetuamos o cálculo mentalmente. Mais uma vez, no entanto, recomendamos o uso do ábaco caso surjam dúvidas envolvendo este tipo de contas.

2.1 SOMAR

É a decomposição de um número em parcelas múltiplas de dez e unidades que justifica a construção do algoritmo clássico da adição. Por exemplo, considere a soma 341 + 237 ou, na notação vertical:

$$\begin{array}{r} 341 \\ +\ 237 \\ \hline 578 \end{array}$$

Podemos decompor as parcelas da seguinte forma:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 341 & = & 300 & + & 40 & + & 1 \\ +\ \underline{237} & = & \underline{200} & + & \underline{30} & + & \underline{7} \\ 578 & = & 500 & + & 70 & + & 8 \end{array}$$

Não é difícil perceber que as operações que realizamos no algoritmo da soma nada mais são do que a adição parcelada das centenas, dezenas e unidades, sempre mantendo a mesma posição. É justamente isso que justifica a regra do algoritmo: centena embaixo de centena, dezena embaixo de dezena, etc. Esta operação também pode ser facilmente visualizada no ábaco.

A soma do exemplo anterior é uma adição "sem reserva", isto é, a soma das parcelas numa determinada casa decimal é menor do que 10. Na hipótese de ser igual ou maior que 10, temos o exemplo de uma adição "com reserva". Considere então o seguinte exemplo:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1}\ \ \\ 147 \\ \underline{+236} \\ 383 \end{array}$$

Também não é difícil justificar este procedimento através da decomposição das parcelas. Senão, vejamos:

$$\begin{array}{rcl} 147 & = & 100 + 40 + 7 \\ \underline{236} & = & \underline{200} + \underline{30} + \underline{6} \\ 383 & = & 300 + 70 + 13 \\ & = & 300 + 70 + 10 + 3 \\ & = & 300 + 80 + 3 \end{array}$$

Obviamente, a decomposição 13 = 10 + 3 é a responsável pelo "vai um" do algoritmo – a dezena que ficou "reservada" - o que corresponde a substituirmos,no ábaco, dez unidades por uma dezena.

Atividade 6. Proponha vários exercícios de adição com números compostos por dois algarismos. Comece com adições "sem reserva" e gradativamente proponha adições "com reserva". Proceda do seguinte modo: escreva a operação na notação horizontal, peça para os alunos armarem a conta (notação vertical) e, uma vez obtido o resultado, escreva a solução na notação horizontal. Repita o procedimento para números da ordem da centena e, finalmente, para números maiores do que mil. Procure evitar o uso do ábaco para estas somas mais complexas. Embora se possa fazer qualquer adição utilizando o ábaco, ele foi introduzido essencialmente para explicar o algoritmo que, com o tempo, acabará por ser incorporado e aplicado mecanicamente.

Atividade 7. Embora não a tenhamos nomeado explicitamente, estivemos utilizando em passagens anteriores a propriedade associativa da adição, aquela que garante que a soma independe da ordem na qual se adicionaram as parcelas. Proponha adições envolvendo três ou mais parcelas, mostrando que elas sempre podem reduzir-se a somas de duas parcelas. Em seguida, generalize o algoritmo da adição para somas com mais de duas parcelas, propondo somas envolvendo várias parcelas. Este é um bom exercício para desenvolver a capacidade de concentração e memorização, mas no qual o professor não deve insistir muito. Para estas somas existe a calculadora!

No caso de ainda haver dificuldades com a adição, utilize o chamado "quadro valor de lugar", como é exemplificado na Figura 9.

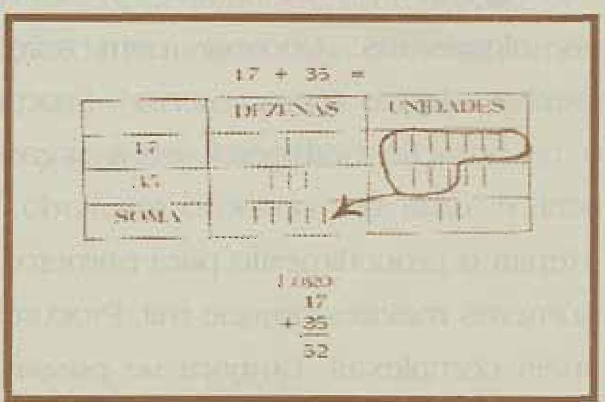


Figura 9

Observe que a representação mostrada na Figura 9 nada mais é do que uma descrição da operação que realizamos quando utilizamos o ábaco para realizar a soma. Em todo caso, "o quadro valor de lugar" constitui uma excelente visualização do que acontece no algoritmo da adição. Além disso, para muitos alunos, pode ser uma mediação necessária entre a operação concreta da adição no ábaco e a representação abstrata do algoritmo.

3 COMPLEMENTOS

Sempre que fazemos um cálculo, é legítimo nos perguntarmos sobre a sua correção, se ele está certo ou errado. Por isso, é comum colocarmos nossas contas à prova, isto é, conferirmos o resultado. Para quem está começando, é importante ter segurança sobre a correção dos resultados dos cálculos. No caso da adição, por exemplo, podemos refazer a conta, fazer a conta invertendo as parcelas ou pedir para alguém fazer a mesma conta. Se os resultados não coincidirem, alguma coisa está errada. Porém, mesmo que os resultados coincidam, a conta ainda pode estar errada, pois podemos ter cometido o mesmo erro ou erros diferentes que dão o mesmo resultado. Não há prova absoluta. O máximo que podemos fazer é diminuir a probabilidade de termos feito a conta errada. É claro que, se os números envolvidos na conta forem pequenos, menor é a possibilidade de errarmos uma conta. Por isso, com base nas propriedades dos números, foram desenvolvidos certos tipos de provas para conferir os resultados das operações. Dentre essas provas, a mais difundida, e que se aplica às quatro operações, é a chamada prova dos nove. Embora sua utilização seja cada vez menor, alguns alunos podem se recordar do algoritmo e, por isso, vamos nos deter um pouco nessa prova e justificá-la para o caso da adição de dois números. Para os outros casos e para as outras operações, os argumentos são análogos.

Suponhamos que queiramos pôr à prova a adição:

$$327 + 468 = 795$$

Para isso, usamos a propriedade de que o resto da divisão da soma por 9 é igual ao resto da divisão por 9 da soma dos restos da divisão por 9 de cada parcela. De fato, 327/9 é igual a 36 e resto 3; 469/9 é igual a 52 e resto. Logo, o resto da divisão da soma dos restos 3 + 1 por 9 é igual a 4. Como 796/9 é igual a 88 e resto 4, fica comprovada a propriedade para este caso particular, mas que vale para qualquer soma. Podemos sintetizar estes resultados através do esquema abaixo:

3	4
1	X

onde X representa a soma das duas primeiras casas (3 + 1). Como X é igual ao resto da divisão do resultado da adição por 9 (X = 4), então a conta está certa.

Naturalmente, isto tudo é muito complicado e temos mais probabilidade de errar nessas contas todas do que na soma original. Acontece que, *como nosso sistema é decimal*, é muito mais fácil encontrar o resto da divisão de um número por 9, que é o que precisamos para obter o esquema. De fato, o número 327, por exemplo, pode ser escrito na forma:

$$327 = 300 + 30 + 7 = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 7$$

Se agora somarmos 3 + 2 e subtraímos 3 + 2 ao termo da direita na expressão, podemos escrever:

$$327 = 3 + 2 - 3 - 2 + 3x100 + 2x10 + 7$$
$$= 3 + 2 + 3x(100 - 1) + 2x(10 - 1) + 7$$
$$= 3 + 2 + 7 + 3x99 + 2x9$$

Como 9 e 99 são múltiplos de 9, segue-se que 327 e a soma de seus algarismos 3 + 2 + 7 = 12, ao serem divididos por 9, deixam o mesmo resto. Por isso, para sabermos o resto da divisão de um número, *tiramos os nove fora*, isto é, da soma dos algarismos subtraímos tantos nove quantos forem possíveis, ou seja, dividimos esta soma por nove. Desse modo, fica fácil construir o esquema da prova dos nove fazendo cálculos com números pequenos e, portanto, com menos probabilidades de errar.

No entanto, atenção! Observe, que se o resultado obtido na soma e o resultado correto diferirem de um múltiplo de nove, a prova dos nove não funciona, isto é, ela apontará como correto um resultado errado. Por exemplo, se por acaso se tivesse obtido o número 706 como resultado da soma anterior, nove fora 4, o resultado estaria correto segundo a prova dos nove. Um erro possível ainda mais comum é uma inversão na ordem dos algarismos, pois ela não será percebida pela prova, uma vez que a ordem das parcelas não altera a soma. Assim, por exemplo, o número 697 também satisfaz a prova dos nove da soma anterior, mas ele é apenas o resultado de uma inversão nos algarismos do resultado correto 796.

Podemos generalizar a explicação anterior para quaisquer números e também não é difícil estendê-la para as outras operações. Normalmente, a prova dos nove é utilizada para a adição e multiplicação, enquanto que, para as operações inversas (subtração e divisão), prefere-se a chamada *prova real*, isto é, perfaz-se a operação inversa para se checar o resultado da conta. Como é provável que os alunos conheçam (ou tenham ouvido falar) a prova dos nove, recomenda-se ao professor que dê uma explicação sobre ela mostrando suas limitações. Todavia, como dissemos anteriormente, sem insistir muito nela. Quanto à prova real, ela constitui um ótimo exercício para treinar as operações inversas e deve ser realizada principalmente no caso de números pequenos.

Em todos os casos, dispomos hoje de uma prova muito mais poderosa, que é aquela proporcionada pelo uso da calculadora eletrônica para checarmos as contas. Por isso, consideramos que chegou o momento de introduzi-la no programa. É o que faremos no item seguinte.

3.1 CALCULADORA

A presença cada vez maior das calculadoras eletrônicas em nosso cotidiano, em virtude de seu baixo custo e praticidade, por si só justificaria seu emprego num programa de alfabetização como este. No entanto, consideramos que a justificativa para seu uso deve também incluir razões de ordem pedagógica. Podemos esboçar nosso argumento para a introdução das máquinas de calcular no ensino do seguinte modo. Seja a seqüência de operações abaixo:

ligue a calculadora (on)
digite o primeiro número (24)
aperte a tecla de adição (+)
digite o segundo número (69)
aperte a tecla de igualdade (=)
leia o resultado (93)

Consideramos que esta seqüência de regras também constitui um algoritmo para a operação de adição, exemplificada pela operação 24 + 69 = 93, muito embora os cálculos sejam realizados pela máquina. Substituindo alguns comandos acima, podemos estender o argumento para as outras operações ou para outros algoritmos como, por exemplo, a extração da raiz quadrada de um número. Assim, fazer "de cabeça" é equivalente a usar um "cérebro eletrônico", com a vantagem de se economizar energia. Isto é pedagogicamente relevante para adultos, não para crianças, pois elas precisam justamente canalizar esta energia para seu desenvolvimento cognitivo. Além disso, do ponto de vista lingüístico, esta seqüência demanda a realização de codificações através do uso de uma linguagem simples, contribuindo assim e ainda mais para o processo de alfabetização no sentido lato.

Pelos argumentos expostos, consideramos a introdução da calculadora neste ponto muito importante, até para desmistificá-la um pouco. Deve ficar claro para os alunos que a calculadora nada mais é do que um ábaco sofisticado, que responde rapidamente às nossas solicitações operatórias. Por outro lado, como acontece ao fazermos qualquer operação, é importante projetarmos uma estimativa do resultado (do tipo: não pode dar mais que 100 ou 1000, etc) antes de realizarmos a operação com a calculadora para prevenir possíveis erros de digitação. O professor deve alertar sempre os alunos para esta espécie de arredondamento quando encontrar resultados disparatados nas contas realizadas por eles.

Atividade 1. Apresente uma calculadora para os alunos descrevendo suas partes principais. Em seguida, realize algumas adições simples no quadro-negro pedindo para os alunos verificarem os resultados utilizando a calculadora. Vá dificultando as adições propostas de modo que fiquem bem claros o valor e a utilidade da calculadora para realizar operações matemáticas. Estimule os alunos que possuírem calculadoras de bolso a usá-la, mostrando que, até este ponto, eles só têm condições de saber se a calculadora está certa no caso da adição!

Ine

3.2 EXERCÍCIOS DE ADIÇÃO

Uma vez compreendida a operação de adição e o seu algoritmo, é importante desenvolver as técnicas operatórias dos alunos as quais, na verdade, eles já utilizam no cotidiano, principalmente quando lidam com dinheiro. Basicamente, estas técnicas consistem na redução das parcelas a múltiplos de dez, como no exemplo abaixo:

106 + 38

100 + 6 + 30 + 8

130 + 14

130 + 10 + 4

140 + 4

144

Note que a mesma operação poderia ser assim desdobrada:

$$\begin{array}{rcr} 100 & + & 6 \\ +\ \underline{30} & + & \underline{8} \\ 130 & + & 14 \end{array}$$

$$130 + 10 + 4$$

$$140 + 4$$

$$144$$

Usando a notação horizontal, temos:

$$106 + 38 = 100 + 6 + 30 + 8 = 130 + 14 = 130 + 10 + 4 = 140 + 4 = 144$$

Assim, é importante que cada aluno desenvolva sua própria técnica operatória, não se limitando simplesmente ao algoritmo da adição, sempre em busca de rapidez e eficiência nos cálculos. Alguns exercícios são sugeridos:

5 + 15	232 + 26
28 + 11	34 + 28 + 6
38 + 13	2 + 60 + 8 + 30
79 + 14	500 + 30 + 10 + 100 + 5
106 + 48	2 + 60 + 8 + 30
127 + 64	75 + 100 + 5 + 300 + 20

Note que, nas somas com várias parcelas, a escolha de qual conta fazer primeiro é fundamental para simplificar a operação. O professor deve dosar a dificuldade dos exercícios conforme as necessidades individuais de cada aluno, socializando as soluções mais criativas ou rápidas. Um exercício excelente consiste em propor somas de parcelas constituídas das frações do real, ou seja, as moedas de 1, 5, 10, 25 e 50 centavos.

Outro exercício que já pode ser introduzido consiste na procura de *incógnitas*. Em vez do famoso x da questão, é conveniente utilizar no início o símbolo □ para indicar a incógnita, em nosso caso, um algarismo que está faltando. Por exemplo, que algarismo deve ser colocado no quadrado para completar a igualdade 5 + □ = 8 ?

Estes exercícios também podem ser propostos na forma algorítmica:

5	25	2□	30	23	48	1□7	235	1□6	370	21	107	2□8
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
7	1□	35	1□	19	25	64	□05	28	2□1	3□	□□	56□
□2	42	62	46	□2	□3	191	340	134	591	□0	□01	□11

Observe que a solução de exercícios deste tipo, tanto na notação horizontal como vertical, exige não só a compreensão da operação em si, mas também o domínio de codificações abstratas da linguagem. Portanto, devem ser propostos para alunos que já estejam realizando exercícios semelhantes com a linguagem verbal.

3.3 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

A integração entre a linguagem verbal e a linguagem matemática se dá no momento privilegiado da resolução de problemas. Embora eles possam ser formulados na linguagem oral, recomenda-se, a esta altura do programa, que sejam formulados na linguagem escrita, de modo que ao menos uma parte do enunciado possa ser lida e compreendida diretamente pelos alunos. A reflexão envolvendo um problema concreto proposto é um trabalho intelectual individual, ou seja, depende da história de cada indivíduo. Por isso, é muito importante que cada aluno tenha a oportunidade de pensar no problema e esboçar sua própria solução que só então deverá ser confrontada com outras soluções e com a solução *standard*. Como neste momento se estabelece uma articulação entre pensamento e linguagem, o enunciado do problema deve ser traduzido recorrendo-se a objetos, diagramas, desenhos etc, até se chegar à sua formulação em linguagem matemática. As propostas de solução por parte dos alunos devem ser exaustivamente trabalhadas, de modo que eles possam verbalizar e expressar em linguagem matemática o processo de solução. Este é o sentido de afirmações do tipo "a matemática desenvolve o raciocínio", pois a resolução de problemas de matemática atua no sentido da construção de modelos para a solução de problemas em geral, contribuindo, portanto, para o equacionamento das situações-problema que surgem no cotidiano dos indivíduos e da comunidade. No entanto, resolver problemas, objeto da *heurística*, é muito mais uma arte do que uma técnica. É o trabalho intelectual de criar soluções que nos faz passar horas debruçados sobre um problema em busca do prazer, satisfação ou alívio que se obtêm quando finalmente o resolvemos.

O professor, provavelmente, deve ter ilustrado as operações de adição realizadas, supondo que estava somando tijolos, lápis, reais, etc. Isto de forma oral. Trata-se agora de formular problemas de forma escrita, procurando enunciados que sejam formados por palavras, em sua maioria, pertencentes ao universo vocabular dos alunos. Exemplos: Benedito gasta dez reais todo dia. Quanto ele gasta por semana? A obra recebeu dois milheiros de tijolos e foram usados mil, duzentos e quarenta e nove tijolos. Qual o total de tijolos ainda disponíveis? Fabiano trabalhou duas horas extras na segunda, três horas na terça e quatro horas na sexta. Quantas horas extras ele trabalhou na semana?

Estes tipos de problemas devem então ser escritos no quadro-negro e nos cadernos para serem resolvidos pelos alunos. O professor deve também estimular a formulação de problemas pelos próprios alunos, selecionando os mais adequados para solução em classe.

Além destes problemas, que constituem praticamente exercícios de aplicação direta da operação de adição, sugerimos alguns outros nos quais essa aplicação é menos explícita:

a) Um tijolo pesa um kg mais meio tijolo. Quanto pesa um tijolo e meio?

b) Quando Pedro nasceu, seu pai tinha trinta e um anos. Hoje Pedro tem treze anos. Qual a idade do pai de Pedro hoje?

c) Um homem que pesa oitenta quilos e seus dois filhos, cada um deles pesando quarenta quilos, querem atravessar um rio. Se eles tiverem apenas um bote, com capacidade de carregar com segurança apenas oitenta quilos, de que modo poderão atravessar o rio?

4 MULTIPLICAÇÃO

१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०

Freqüentemente surge a necessidade de somarmos parcelas iguais como, por exemplo, quando temos de pagar cinco quilos de arroz ou meia dúzia de cervejas. Nestes casos, é conveniente introduzirmos uma nova operação - a multiplicação - para facilitar os cálculos que envolvem múltiplas parcelas iguais. Esta operação corresponde, no ábaco, à tarefa de contarmos de dois em dois, três em três etc, em vez de um em um.

Atividade 1. Utilizando o ábaco, faça a contagem do número doze de dois em dois, três em três e quatro em quatro, mostrando que para isso temos que contar seis, quatro e três *vezes*, respectivamente. Disponha claramente no ábaco os grupos de duas, três e quatro argolas para que os alunos possam fazer a contagem. Escreva em seguida no quadro as seguintes igualdades:

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 6 \times 2 = 12$$

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$$

$$4 + 4 + 4 = 3 \times 4 = 12$$

introduzindo assim o sinal de vezes (x) para a operação de multiplicação. Repita o procedimento para outros números que sejam múltiplos de 2, 3, 4, 5 etc.

Mostre que, por extensão, podemos também escrever

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 12 \times 1 = 12$$

$$0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 12 \times 0 = 0$$

deixando claro que o elemento neutro da multiplicação é o 1 e não o zero.

A multiplicação goza de uma propriedade, importante, chamada distributiva, isto é:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Usando esta propriedade, podemos reduzir qualquer produto a uma soma de produtos por um. Por exemplo:

$$\begin{aligned} 4 \times 5 &= 4 \times (1 + 1 + 1 + 1 + 1) = \\ &= 4 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 + 4 \times 1 = \\ &= 4 + 4 + 4 + 4 + 4 \\ &= 4 \times 5 = 20 \end{aligned}$$

Isso mostra que, efetivamente, a multiplicação dos números naturais é uma soma de parcelas iguais. Portanto, se sabemos somar, também saberemos multiplicar!

Atividade 2 Tal como no caso da adição, construa com os alunos a tabuada de multiplicação

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Observe que cada linha pode ser construída somando-se sucessivamente o número correspondente a partir da quarta coluna. De qualquer maneira, para a construção e memorização da tabela, use e abuse da propriedade distributiva. Assim, por exemplo:

$$2 \times 9 = 2 \times (3 + 3 + 3) = 2 \times 3 + 2 \times 3 + 2 \times 3 = 6 + 6 + 6 = 18$$

que, afinal, é o que fazemos quando temos dúvida sobre a tabuada.

Uma vez construída a tabuada, aproveite para mostrar as propriedades da multiplicação, elemento neutro e comutativa, facilmente visualizadas na tabela.

4.1 ALGORITMO DA MULTIPLICAÇÃO

Para que os alunos fixem o algoritmo da multiplicação, comece multiplicando números de dois algarismos por números de um algarismo, utilizando inicialmente números pequenos. Exemplo:

$$12 \times 2 = (10 + 2) \times 2 = 10 \times 2 + 2 \times 2 = 20 + 4 = 24$$

Mostre que, na notação vertical, podemos escrever o mesmo cálculo assim:

$$\begin{array}{r} 10 + 2 \\ \times \quad 2 \\ \hline 4 \\ +\ 20 \\ \hline 24 \end{array}$$

justificando o algoritmo tradicional da multiplicação:

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 2 \\ \hline 24 \end{array}$$

Continue, agora, usando dois algarismos com números maiores, de modo que se tenha a multiplicação com reserva, recorrendo sempre à tabuada para realizar as operações. Em seguida, passe para números com três algarismos. Exemplo:

$$391 \times 3 = (300 + 90 + 1) \times 3 = 900 + 270 + 3 = 1173$$

ou na notação vertical:

$$\begin{array}{r} 300 \;+\; 90 \;+\; 1 \\ \times \;\; 3 \\ \hline 3 \\ 270 \\ +\;\; 900 \\ \hline 1173 \end{array}$$

justificando o algoritmo tradicional:

$$\begin{array}{r} {}^{2} \\ 391 \\ \times 3 \\ \hline 1173 \end{array}$$

O próximo passo consiste em multiplicar números com dois algarismos até que, sucessivamente, se chegue ao algoritmo da multiplicação, deixando de escrever os zeros e memorizando certas passagens. Exemplo:

$$27 \times 31 = (20 + 7) \times (30 + 1) = 20 \times 30 + 20 \times 1 + 7 \times 30 + 7 \times 1 = 837$$

ou, na notação vertical:

$$\begin{array}{r} 20 + 7 \\ \times\, 30 + 1 \\ \hline 7 \\ 20 \\ 210 \\ +\,600 \\ \hline 837 \end{array}$$

que, com a prática, se reduz ao algoritmo usual:

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times\, 31 \\ \hline 27 \\ +\,81 \\ \hline 837 \end{array}$$

Observe que, devido ao fato de nosso sistema de numeração ser de base dez, a multiplicação por dez significa elevarmos um número a uma ordem superior, isto é, se multiplicarmos três unidades por dez, teremos três dezenas que, multiplicadas por dez, resultam em três centenas, e assim por diante. Essa propriedade, utilizada implicitamente no algoritmo, deve ser enfatizada pelo professor, resgatando a escrita de um número como uma soma de suas ordens. Por exemplo:

$$333 = 3 \times 100 + 3 \times 10 + 3$$

Novamente, mostre que as operações com os números naturais decorrem diretamente do processo de numeração utilizado.

4 4 4 4

5 SUBTRAÇÃO

A subtração é a operação inversa da adição. Isto pode ser entendido de diversas maneiras. Se somar é, essencialmente, contar de um em um, subtrair é *descontar*. Isto é, tiramos de uma determinada quantidade uma outra de um em um, para obtermos o resultado da subtração. Por outro lado, se somar é acrescentar, subtrair é *diminuir*: o resultado da subtração é sempre menor que a quantidade da qual partimos na operação. Dizemos também que falta uma determinada quantidade a um número menor para ele poder se igualar a um número maior. A *diferença* é o resultado da subtração entre os dois números.

Formalmente, podemos representar a subtração como o resultado da seguinte operação:

$$a + \square = c$$

Ou seja, dados dois números a e c, devemos encontrar um terceiro que, somado ao primeiro, dê como resultado o segundo. Por exemplo:

$$5 + \square = 8 = 5 + 3$$

que é equivalente a escrevermos: $8 - 5 = \square = 3$. Isso mostra perfeitamente o caráter inverso da operação de subtração.

Atividade 1. Realize no ábaco operações como a do exemplo dado, mostrando a relação inversa que existe entre tirar e pôr ou entre acrescentar e diminuir, escrevendo as operações no quadro- negro.

Na verdade, se a subtração é a operação inversa da adição, a adição também pode ser vista como operação inversa da subtração. Em termos da psicologia piagetiana, diz-se que há uma ação de *reversibilidade* entre as duas operações que, uma vez construída na mente, permite passar de uma operação para a outra.

Atividade 2. Construa, juntamente com os alunos, a tabuada da subtração abaixo:

-	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		0	1	2	3	4	5	6	7	8
2			0	1	2	3	4	5	6	7
3				0	1	2	3	4	5	6
4					0	1	2	3	4	5
5						0	1	2	3	4
6							0	1	2	3
7								0	1	2
8									0	1
9										0

Discuta com os alunos as semelhanças e diferenças desta tabela com aquela da adição, em termos de simetria e propriedades das operações, enfatizando a impossibilidade de realizar certas subtrações. Dizemos que a operação de subtração não é *fechada* no conjunto dos números naturais, o que somente acontecerá se estendermos esse conjunto pela introdução dos chamados números relativos, isto é, negativos e positivos.

5.1 TÉCNICAS DE SUBTRAÇÃO

Ao contrário da adição, o algoritmo da subtração é executado de dois modos diferentes em nosso cotidiano. Na notação vertical, podemos descrever esses dois modelos da seguinte maneira:

$$\begin{array}{r} 2\phantom{{}^{1}5} \\ -\ \cancel{3}\,{}^{1}5 \\ 18 \\ \hline 17 \end{array} \quad \text{ou} \quad \begin{array}{r} 3\,{}^{1}5 \\ -\ {}^{2}\cancel{1}8 \\ \hline 17 \end{array}$$

A primeira maneira de se executar o algoritmo, também chamada impropriamente de "técnica de empréstimo", pode assim ser representada na linguagem horizontal:

$$35 - 18 = (30 + 5) - (10 + 8) = (20 + 15) - (10 + 8)$$
$$= (20 - 10) + (15 - 8) = 10 + 7 = 17$$

O segundo modo, chamado de "técnica de compensação", consiste no acréscimo de uma dezena a cada membro da operação, que assim se compensam não interferindo no resultado final:

$$35 - 18 = (30 + 5) - (10 + 8) = (30 + 15) - (20 + 8) =$$
$$= (30 - 20) + (15 - 8) = 10 + 7 = 17$$

Intuitivamente, todos nós damos preferência a uma ou outra técnica em nossos cálculos práticos e a utilizamos de forma mecânica para realizarmos subtrações. Conceitualmente, como podemos facilmente verificar no ábaco ou usando o "quadro valor de lugar", a "técnica do empréstimo" é a mais direta e a que melhor expressa a reversibilidade entre a adição e a subtração. A "técnica da compensação" pressupõe que a adição de uma mesma quantidade ao minuendo e ao subtraendo não altera o resultado da operação. Esse fato é, intuitivamente, experimentado por nós, quando, por exemplo, verificamos que a diferença entre nossas idades não se altera com o passar dos anos. Na verdade, o problema todo se reduz à compreensão da equivalência

$$15 - 8 = 7 \qquad \Leftrightarrow \qquad 15 = 7 + 8$$

que deve ser exaustivamente trabalhada no ábaco e que mostra que, na realidade, não há nenhum "empréstimo", pois também não há nenhuma devolução.

Quanto à operacionalização do algoritmo da subtração, o professor poderá escolher uma outra técnica, de acordo com seu costume, variando-a conforme perceba dificuldades por parte dos alunos, sempre mostrando a equivalência entre elas. Tal como no caso da adição, o "quadro valor de lugar" é um recurso precioso para mediar a realização concreta no ábaco e sua representação abstrata no quadro-negro ou caderno.

5.2 *EXERCÍCIOS E PROBLEMAS DE SUBTRAÇÃO*

Tal como no caso da adição, o professor deverá avançar gradativamente na proposição de exercícios de subtração, começando com números de dois algarismos sem que haja necessidade de "empréstimo" para realizar a operação. Valem também as observações anteriores sobre o uso da prova dos nove e da calculadora. A prova real das operações deve sempre ser realizada, pois ressalta a reversibilidade entre a adição e a subtração. Também devem ser propostos exercícios onde a decomposição dos números simplifica a operação, como, por exemplo:

$$15 - 8$$

$$5 + 10 - 8$$

$$5 + 2$$

$$7$$

sempre usando a decomposição decimal.

Exercícios de procura de incógnitas do tipo

$$\square 7 - 5\square = 28$$

também devem ser propostos, tanto na notação horizontal como na vertical.

Problemas-padrão devem ser utilizados pelo professor para trabalhar a operação de subtração na forma oral. Por exemplo: Benedito comprou doze bananas e comeu oito. Quantas bananas sobraram? Benedito tem trinta e oito anos e Pedro vinte e nove. Quantos anos Benedito tem a mais do que Pedro? Benedito já pagou sete cervejas das dez que perdeu para Pedro no último jogo do Brasil. Quantas cervejas ele ainda terá de pagar para Pedro? - Cabe então, sempre de acordo com o desenvolvimento da linguagem dos alunos, propor esses exercícios na forma escrita, para que possam ser formulados em linguagem matemática e depois resolvidos.

Seguem alguns problemas adequados para discussão de estratégias para solucionar problemas e que envolvem a operação de subtração:

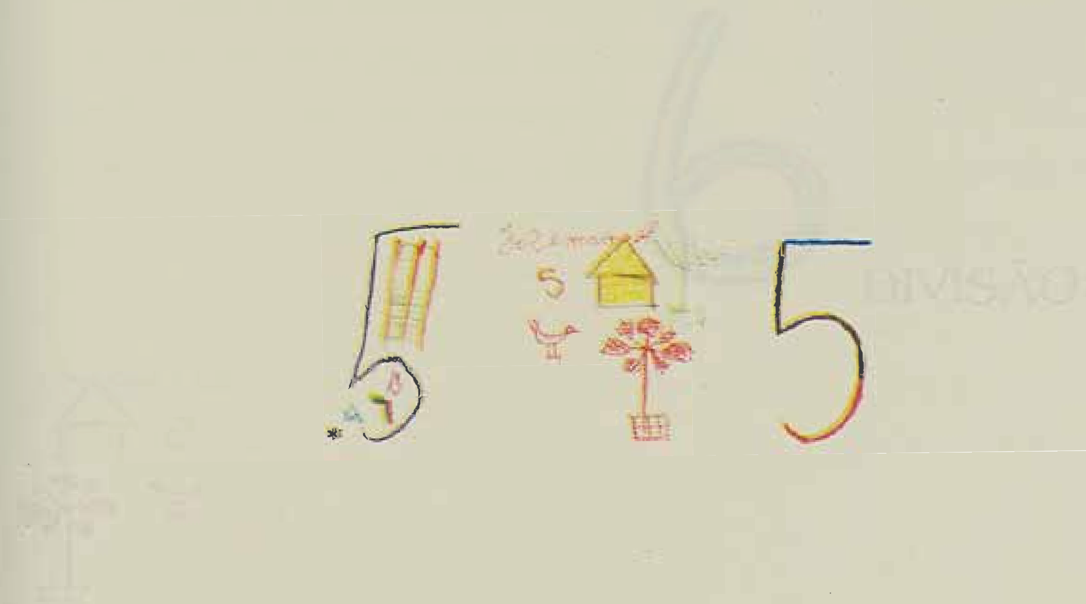
a) João quer pesar seu gato, mas este não pára na balança. Como ele deve proceder para saber o peso do gato?

b) Pedro e José têm, juntos, trinta e seis discos. Pedro tem seis a mais que José. Quantos discos tem cada um?

c) Entrei no elevador, desci cinco andares, subi seis, desci sete e cheguei ao segundo andar. Em que andar eu estava?

d) Como é possível retirarmos de um rio exatamente seis litros de água se, para medirmos a água, dispomos apenas de dois recipientes, um com quatro e outro com nove litros de capacidade?

e) Benedito resolveu passar sete dias numa pensão. Ele não tem dinheiro para pagar, mas tem uma correntinha de prata com sete aros. O dono da pensão aceita um aro como pagamento, desde que ele seja entregue no fim do dia, isto é, a cada dia ele aceita receber um aro. Onde Benedito deve cortar a corrente, de modo a cortar apenas um aro e realizar o pagamento diariamente?



da pensão aceita também como pagamento, desde que ele seja entregue no fim do dia, isto é, a cada dia ele aceita receber [illegible] Dona Remédio deve começar [illegible] [illegible]

6 DIVISÃO

10 11 12... 13 20... 22...

Tal como acontece com a subtração em relação à adição, a divisão é a operação inversa da multiplicação:

$$15 \div 3 = 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 \times 5 = 15$$

Nas aulas, inicialmente, deve-se explorar o sentido intuitivo de divisão como repartição (em partes iguais). Por outro lado, deve-se também relacionar a divisão com a subtração, da mesma forma que a multiplicação foi associada com a adição de parcelas iguais. Por exemplo, ao repartirmos um certo número de lápis pelos alunos, vamos subtraindo quantidades iguais do dividendo. Em seguida, já introduzindo o algoritmo da divisão, vamos realizar operações que possam ser feitas utilizando-se a tabuada de multiplicação:

$$\begin{array}{r|l} 18 & \underline{3} \\ -\underline{18} & 6 \\ 0 & \end{array} \qquad \qquad \begin{array}{r|l} 49 & \underline{7} \\ -\underline{49} & 7 \\ 0 & \end{array}$$

Neste momento, devemos mostrar que a divisão geralmente não é exata e que, neste caso, sobra um resto para ser dividido:

$$\begin{array}{r|l} 19 & \underline{3} \\ -\underline{18} & 6 \\ 1 & \end{array}$$

Note que sempre fazemos estas divisões por tentativa, procurando pelo quociente máximo possível.

Atividade 1. Construa com os alunos a tabuada de divisão abaixo.

÷	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0										
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0		1		2		3		4	
3	0			1			2			3
4	0				1				2	
5	0					1				
6	0						1			
7	0							1		
8	0								1	
9	0									1

Explore bem esta tabela com os alunos, mostrando as diferenças em relação às outras operações. Introduza a idéia de divisores de um número, isto é, os números pelos quais podemos dividir determinado número, mostrando que são justamente eles que aparecem na tabela. Provavelmente, surgirá a questão, por exemplo, da divisão de um por dois, resultando metade para cada um. Aproveite para dizer que, para preenchermos a tabela totalmente, precisamos ampliar o nosso conjunto de números com a introdução dos chamados números racionais, que serão tratados em seguida no programa.

Parta, em seguida, para dividendos maiores enfatizando a necessidade de fazermos uma *estimativa* sobre o quociente. A base desta estimativa consiste em se avaliar o número de vezes em que podemos subtrair o divisor do dividendo. Por exemplo, seja a divisão de 317 por 8. É claro que o resultado deve estar entre 10 e 100. Procedemos então da seguinte forma:

$$\begin{array}{r|l} 317 & \underline{8} \\ \underline{-80} & 10 \\ 237 & 20 \\ \underline{-160} & \\ 77 & 5 \\ \underline{-40} & \\ 37 & 4 \\ \underline{-32} & \\ 5 & \end{array}$$

O quociente é igual a 10 + 20 + 5 + 4 = 39, com resto igual a 5. Ou, fazendo inicialmente uma estimativa melhor:

$$\begin{array}{r|l} 317 & \underline{8} \\ \underline{-240} & 30 \\ 9 & \\ \underline{-72} & \\ 5 & \end{array}$$

Na notação horizontal, teremos :

$$317 \div 8 = (8 \times 10 + 8 \times 20 + 8 \times 5 + 8 \times 4 + 5) \div 8 =$$

$$= 10 + 20 + 5 + 4 + 8 \div 5 = 39 + 8 \div 5$$

ou

$$317 \div 8 = (30 \times 8 + 9 \times 8 + 5) \div 8 = 30 + 9 + 8 \div 5 = 39 + 8 \div 5$$

Observe que poderíamos começar com qualquer número no lugar do quociente, desde que o produto deste número pelo divisor (ou seja, quantas vezes podemos subtrair o divisor do dividendo) seja menor ou igual ao dividendo. Na prática, o que fazemos é tomar o maior número possível nestas condições e abreviar o processo. O quociente da divisão será a soma dos quocientes parciais. Simplificando-se o processo, chega-se ao algoritmo usual

```
 317 |_8_            317 |_8_
 -24   39     ou       77  39
  77                    5
 - 72
    5
```

sendo que, evidentemente, o último caso envolve um cálculo abstrato maior.

Apenas a título de curiosidade, damos mais um exemplo, com a respectiva versão inglesa do algoritmo:

```
 509 |_37_          10 + 2 + 1 = 13
-370   10           37 | 509
 139    2                370
 -74                     139
  65   _1_                74
 -37   13                 65
  28                      37
                          28
```

Novamente, insistimos na afirmação de que contas mais complicadas não constituem o objetivo primeiro de um programa de alfabetização de jovens e adultos. Como há sempre aqueles que gostam de um desafio, o professor deverá ter à mão alguns exercícios com contas de dividir complicadas (de preferência divisões exatas, para que o aluno saiba se acertou ou não fazendo a prova real) para passar como lição de casa. Será útil na formulação desses exercícios que o professor recorde os critérios de divisibilidade, especialmente os mais fáceis (divisão por 2, 3, 5, 6 e 9), para construir números que dêem divisão exata.

6.1 FRAÇÕES

Outra notação importante da divisão é a seguinte:

$$\frac{15}{3} = 5$$

Embora esta notação seja a mais adequada para introduzir frações, não é este o nosso objetivo a esta altura do programa, mas sim introduzir razões e proporções e, mais especialmente, porcentagens. No entanto, convém que o professor discuta com seus alunos as frações mais comuns como 1/2, 1/3,1/4, etc, explicando que elas exprimem a impossibilidade da divisão da unidade, e ainda as operações inversas 2 x 1/2, 3 x 1/3, 4 x 1/4, etc.

Atividade 2. Discuta com os alunos o mostrador de um relógio de ponteiros que marque horas e minutos, enfatizando as frações de hora. Observe que só podemos atribuir um número inteiro a uma fração de hora porque consideramos que ela pode ser tomada como equivalente a sessenta minutos.

Razões constantes sob a forma de frações constituem a maneira mais simples de expressarmos uma relação entre variáveis. Por exemplo, num carro, a razão do número de pneus para cada carro é geralmente de quatro para um. Uma razão constante como essa nos permite estabelecer proporções. Assim, por exemplo, se tivermos dois carros teremos oito pneus ou, genericamente

$$\frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4} = \text{........etc}$$

significando que o número de pneus dos carros está sempre na mesma proporção de quatro para um. Dizemos também que o número de pneus é diretamente proporcional ao número de carros. Da mesma forma, a distância que conseguimos percorrer num determinado tempo é diretamente proporcional à nossa velocidade. Por outro lado, o tempo que levamos para percorrer uma determinada distância é *inversamente* proporcional à nossa velocidade.

A igualdade estabelecida numa proporção nos permite resolver problemas do seguinte tipo:

a) Se houver trinta e seis pneus nos carros de um estacionamento, quantos carros há ?

Solução :

$$\frac{4}{1} = \frac{36}{\square}$$

e, portanto,

$$\square = (36 \times 1)/4 = 9 \text{ carros}$$

b) Quantos pneus há na corrida se estão competindo sete carros ?

Solução :

$$\frac{4}{1} = \frac{\square}{7}$$

e, portanto,

$$\square = (4 \times 7)/1 = 28 \text{ pneus}$$

Atividade 3. Aqui são apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos usando-se a idéia de proporção :

a) Comprei três metros de tecido por R$ 2.940,00. Quanto pagarei por sete metros?

b) Se quatro operários constroem uma casa em dezoito dias, quantos dias levarão sete operários para construir a mesma casa ?

c) Numa sala de $6m^2$ de área, usei cento e cinqüenta ladrilhos. Quantos ladrilhos serão necessários para uma sala de $8m^2$?

Observe que estes problemas podem ser resolvidos utilizando-se um algoritmo chamado "regra de três", assim chamado exatamente porque permite encontrar o quarto termo de uma proporção, dados os outros três.

Pedagogicamente, no entanto, é cada vez mais unânime entre os educadores matemáticos a desnecessidade da introdução deste algoritmo (inclusive porque causa confusão no caso de grandezas inversamente proporcionais), preferindo-se trabalhar com a noção de razão ou proporção. É o que faremos em seguida, para introduzirmos a idéia de porcentagem.

6.2 PORCENTAGENS

As porcentagens são razões ou proporções envolvendo o número cem. Assim, se, de cada cem eleitores, dez votaram no candidato A, então dizemos que a quantidade relativa de votos desse candidato será de 10 em 100, 10 por 100, 10/100 ou 10%, que se lê "dez por cento". Supondo agora que votaram oitocentos eleitores, quantos votos terá o candidato A no total?

Podemos pensar que, como 800 = 100 x 8 e como, no universo de cem eleitores, 10 votam em A, então A terá 8 x 10 = 80 votos. Outra maneira de se chegar ao mesmo resultado é dividir 800 em 10 partes, o que dá para cada parte 80, que corresponde a 10%, isto é, 800/10 = 80 votos para o candidato A. Em termos de proporção temos :

$$\frac{10}{100} = \frac{\square}{800}$$

logo, $\square = (800 \times 10)/100 = 80$ eleitores

Note que, em todos os casos apresentados, estamos tomando como hipótese que a razão de votos atribuídos ao candidato A se mantém constante, qualquer que seja o número de eleitores.

Nas aulas, a idéia é começar a tratar de porcentagens através de uma proporção constante, já conhecida pelos alunos. Por exemplo, se um determinado volume de massa (um balde, por exemplo) é feito com uma parte de cimento para três partes de areia, isto é, na razão de um para três, quanto de areia e cimento serão necessários para obtermos vinte baldes de massa? Usando-se a multiplicação, conclui-se que vamos precisar de vinte partes de cimento e sessenta partes de areia, para se manter a proporção inicial. Analogamente, para obtermos vinte e cinco baldes, serão necessários vinte e cinco partes de cimento e setenta e cinco partes de areia. Mas, atenção! Isso nos diz que em cem partes de massa, vinte e cinco são de cimento e o restante (setenta e cinco partes) de areia. Ou seja, a porcentagem de cimento nessa massa é de 1 para 4 ou 25%. Com esse valor, fica fácil calcular a quantidade de cimento necessária para obtermos 60, 1200, 33, ou qualquer número de baldes de massa. Assim, se expressarmos a proporção em porcentagem, teremos uma maneira direta de obter a quantidade de cimento ou areia necessários para se fazer qualquer quantidade de massa daquele tipo.

Atividade 4. Passe em seguida a calcular algumas porcentagens. Sugerimos inicialmente tratar de porcentagens inteiras: 20%, 15%, etc. Calcule então descontos de preços, de salários, etc, sempre lidando com porcentagens inteiras. Um bom exercício será tomar um jornal de domingo e analisar os descontos oferecidos pelas lojas, arredondando os valores para porcentagens inteiras. Em seguida, discuta o problema inverso, isto é, a que porcentagem corresponde uma determinada alteração no valor do salário, preço, etc.

6.3 OUTROS PROBLEMAS

Seguem mais alguns problemas envolvendo agora as quatro operações:

a) Pensei num número, multipliquei-o por 4 e ao resultado somei 5. O resultado total foi 45. Você saberia me dizer em que número pensei ?

b) Estou pensando em um número. A metade dele é igual a uma dúzia e meia. Qual é o número?

c) Miro pagou 155 reais com notas de 5, 10, 50 e 100. Ele pagou com doze notas. Quantas notas deu de cada uma?

d) Tenho oito notas na carteira, num total de 120 reais. Que notas são essas?

e) João vai cercar um terreno com estacas e arame farpado. O terreno mede 10m por 30m. Colocando as estacas de dois em dois metros, de quantas estacas ele precisará? Quantos metros de arame serão necessários se a cerca for feita com quatro fios de arame?

f) Uma lesma está no fundo de um poço, com 6m de profundidade. Ela sobe 2m por dia, pára um pouquinho e cai 1m. Quantos dias ela levará para chegar ao topo do poço?

g) Há duas aberturas que enchem uma piscina com capacidade para 57.600 litros de água. Com cada uma das aberturas funcionando sozinha, a piscina fica cheia em noventa e seis horas (quatro dias). Com a outra abertura funcionando sozinha, a piscina fica cheia em setenta e duas horas (três dias). Em quanto tempo a piscina ficará cheia se as duas aberturas estiverem funcionando ao mesmo tempo?

h) Uma torneira sozinha enche um tanque em duas horas. Um buraco, no fundo do tanque, quando aberto, esvazia-o em três horas. Se a torneira e o buraco estiverem abertos (uma enchendo e o outro esvaziando), em quanto tempo o tanque estará cheio?

i) Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a noventa e nove dias?

j) Numa competição de ciclismo, Carlinhos dá uma volta completa na pista em trinta segundos e Paulinho em trinta e dois segundos. Quando Carlinhos completar a volta de número 80, quantas voltas estará completando Paulinho?

k) Um número tem três algarismos. O produto desses algarismos é 126 e a soma dos dois últimos é 11. Qual é o número?

l) João completa uma determinada tarefa em quatro dias, enquanto Pedro demora doze dias para completar a mesma tarefa. Em quantos dias eles terminarão a tarefa se trabalharem juntos?

GEOMETRIA

Geometria significa medida da terra. Não a Terra, nosso planeta, mas no sentido de área geográfica. Sua origem é exatamente esta: a medida das terras agricultáveis. Seu estudo se justifica, hoje, não só por causa disso, mas por sua aplicação nas medidas em geral de comprimento, área e volume. Além disso, do ponto de vista da formação geral, a geometria é muito importante para desenvolver nas pessoas sua capacidade de representação e de visualização de objetos no espaço. Neste sentido, ela é anterior à própria escrita, como atestam os desenhos pré-históricos encontrados nas cavernas.

Pedagogicamente, assiste-se hoje a uma revitalização do ensino da geometria, dada sua importância na elaboração da moderna tecnologia, dos *softwares* aos satélites. O domínio da geometria é também muito importante no cotidiano das pessoas. Assim, por exemplo, na construção civil ela é necessária, não só na leitura e interpretação das plantas, mas como parte fundamental na percepção dos espaços da obra pelos operários.

A geometria foi a primeira parte da matemática a ser totalmente axiomatizada, isto é, construída dedutivamente a partir de algumas poucas afirmações tomadas como postulados, do tipo: *por dois pontos passa uma e uma única reta* - e mais algumas definições. Isto foi feito por Euclides há cerca de trezentos anos a. C. e, por isso, a geometria baseada nestes postulados se chama geometria euclidiana.

O objetivo deste tópico é fazer com que os alunos desenhem figuras geométricas no plano, com o auxílio de uma régua, e se familiarizem com seus nomes. Para isso, todo conceito geométrico deverá ser trabalhado pelo professor, tendo em vista também sua representação escrita até onde for possível, é claro, de acordo com o estágio de alfabetização atingido pela classe.

Pode-se começar traçando uma reta no piso da sala de aula, discutindo com os alunos seu papel de divisor do espaço, sua semelhança com a noção de alinhamento e as possibilidades de sua extensão a partir de uma ou outra das extremidades, confrontando sempre o conceito com o conceito oposto de curva (embora a reta possa também ser concebida como uma curva particular). Em seguida, traça-se uma reta no quadro-negro explorando sua posição relativa até se chegar à idéia de reta vertical, em estreita conexão com a direção dada por um fio de prumo. A noção seguinte a ser introduzida é a de ângulo. Traça-se uma reta que corte a reta vertical e indica-se a inclinação dessa reta oblíqua em relação à vertical através de um ângulo, como na Figura 10.

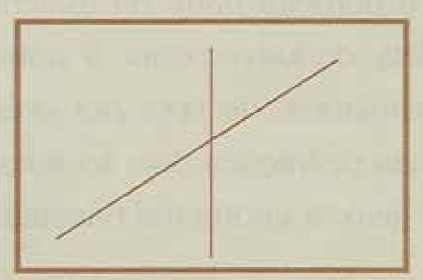


Figura 10

Introduz-se em seguida o conceito de reta horizontal, traçando uma reta que corte a vertical de forma simétrica, isto é, que tenha o mesmo ângulo de inclinação tanto para a direita como para a esquerda, relacionando-a com a chamada linha do horizonte. Neste caso, dizemos que o ângulo entre as duas retas é um ângulo reto, ou de 90 graus, e representamos isso como na Figura 11. As retas são chamadas perpendiculares.

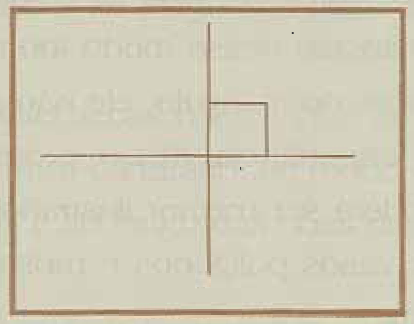


Figura 11

Em seguida, discuta com os alunos outra possibilidade para a posição relativa de duas retas num plano, introduzindo a noção de retas paralelas, como aquelas que, intuitivamente, "andam juntas" ou que nunca se encontram. Todo este trabalho deve ser desenvolvido com a participação ativa dos alunos, de modo que eles possam desenhar com régua e lápis em seus cadernos as posições relativas de duas retas, identificando as verticais, horizontais, perpendiculares, paralelas e oblíquas.

Dadas duas retas oblíquas, se traçarmos uma terceira reta que não seja perpendicular a nenhuma das duas, obtém-se uma figura fechada chamada triângulo. Explique a lógica subjacente a este nome, mostrando que ele significa três ângulos, apontando-os na figura. Introduza nesse momento a noção de vértice, como o encontro de dois lados do triângulo. Concretize melhor a idéia dessa figura geométrica pegando três ripas de madeira para montar um triângulo. Junto com os alunos, verifique que é possível a construção de apenas um triângulo desse modo (ou nenhum). Mostre que, se colocarmos pregos nos vértices do triângulo, ele não se deforma sob pressão. Discuta com os alunos a importância dessa propriedade do triângulo na construção. Isto também poderá ser melhor ilustrado, utilizando-se um metro de carpinteiro para construir vários polígonos e mostrando que só o triângulo constitui uma figura "amarrada".

Deixe que os alunos explorem os vários tipos de triângulos possíveis, enfatizando aqueles com ângulos e lados iguais, sem necessidade de nomeá-los. Chame a atenção para o triângulo eqüilátero como o polígono regular de três lados.

Através do mesmo procedimento, agora utilizando quatro retas, construa o quadrângulo ou quadrilátero, ressaltando os quadriláteros especiais, (quadrado, retângulo, paralelogramo e losango), identificando suas propriedades com relação a ângulos e lados. Introduza também a noção de diagonal como aquela reta que, partindo de um vértice qualquer de uma dessa figuras, divide-as em partes iguais, traçando todas as diagonais em cada caso.

Atividade 1. Pegue um jogo de dominó e discuta com os alunos a forma de suas peças e o tipo de figuras que podemos construir com elas. Apresente então para os alunos os seguintes desafios, em ordem crescente de dificuldade:

a) Com as oito peças (0 e 0), (0 e 1), (0 e 2), (0 e 3), (1 e 1), (1 e 2), (2 e 2) e (2 e 3), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais e verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 5.

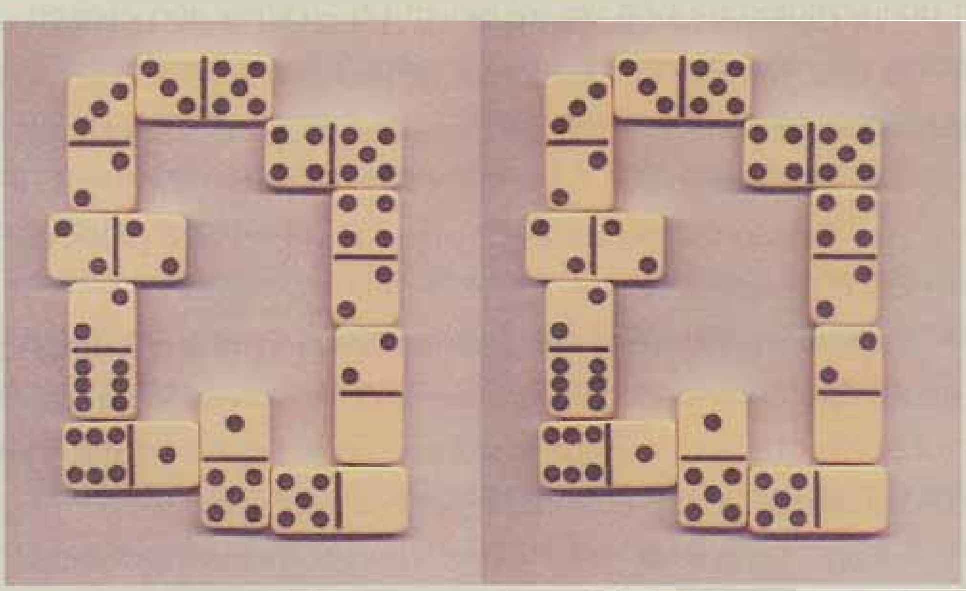
b) Com as oito peças (1 e 1), (1 e 2), (1 e 3), (1 e 4), (2 e 3), (2 e 4), (3 e 4) e (3 e 5), formar um quadrado, de modo que as somas ao longo das linhas horizontais, verticais e ao longo das duas diagonais sejam todas iguais a 10.

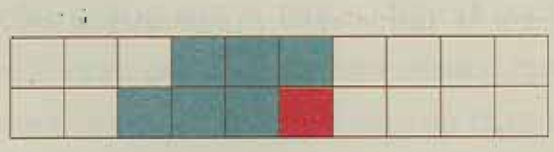
c) Trocando apenas as peças (1 e 1) e (3 e 5) pelas peças (0 e 2) e (4 e 4), repetir o desafio anterior.

Os alunos devem ser estimulados a construir outros quadrados mágicos desse tipo com as peças maiores e/ou envolvendo um maior número de peças (observe que o maior quadrado que pode ser construído com as vinte e oito peças do dominó é um quadrado 6x3 com dezoito peças).

Para completar esta parte de geometria, introduza ainda os polígonos regulares, hexágono e pentágono, ressaltando sempre os triângulos como unidades menores a partir das quais todos os polígonos podem ser construídos.

os polígonos estudados, utilizando para isso qualquer lápis de cor. Essas redes podem ser obtidas utilizando-se papel quadriculado, o que permite inclusive a criação de padrões sextavados, octogonais, etc. A idéia é construir padrões regulares para pisos, para paredes de azulejos, para tecidos ou cestos de palha, a partir de unidades determinadas pela forma, pela cor ou pelo desenho de cada peça.





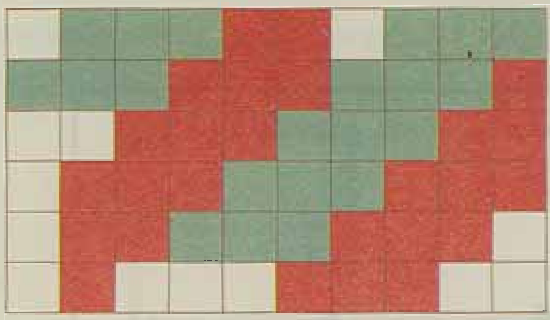


Figura 12

Atividade 3. Usando doze palitos de fósforo, forme a figura abaixo:

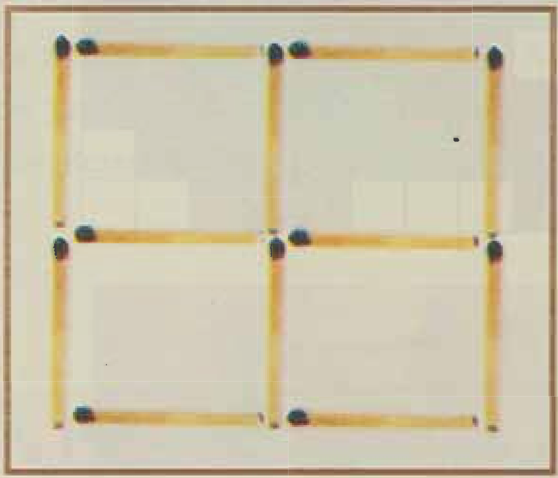


Figura 13

Observe que a figura é formada por um quadrado grande, cujo lado mede "dois palitos" dentro do qual estão quatro quadrados com "um palito de lado". Proponha então os seguintes problemas aos seus alunos:

a) Formar apenas dois quadrados retirando somente dois palitos.

b) Formar dois quadrados mexendo apenas quatro palitos.

c) Formar três quadrados retirando dois palitos.

d) Formar três quadrados retirando apenas um palito.

e) Retirar dois palitos de forma a restar apenas um quadrado na figura.

f) Formar três quadrados mudando de lugar apenas quatro palitos.

g) Formar três quadrados mexendo apenas três palitos.

g) Formar três quadrados mexendo apenas três palitos.

h) Formar mais cinco quadrados acrescentando à figura apenas quatro palitos.

7.1 JOGOS

A atividade anterior sugere a utilização de jogos e brincadeiras conhecidas dos alunos para explorar sua habilidade matemática. Neste tópico apresentaremos dois jogos para serem jogados entre duas pessoas e que estão relacionados com o material visto até agora. O professor pode utilizá-los, de uma forma lúdica, seja para ocupar um grupo de alunos fora de sintonia, por alguma razão com o restante da classe, seja envolvendo a classe inteira. Esses jogos têm estratégias matemáticas conhecidas e estão relacionados entre si, como veremos, de uma maneira surpreendente.

O primeiro é uma segunda versão do *jogo do quinze*. Nove cartas de um baralho, com valores do ás ao 9, são dispostas sobre uma mesa com as figuras abertas. Cada jogador apanha uma carta de cada vez. Considerando novamente o ás como 1, ganha aquele que primeiro completar quinze pontos retirando três cartas.

O outro é o *jogo do peão*. Sobre a mesa estão dispostos nove cartões, sendo que neles estão impressas as palavras TEL, PT, TUA, LÓ, PEÃO, OU, CAL, PC E CÉU, uma em cada cartão. Cada jogador retira um cartão de cada vez, ganhando aquele que primeiro obtiver três cartões que tenham a mesma letra.

Dispondo as cartas e os cartões desses jogos de maneira adequada, não é difícil perceber que eles são correspondentes ao conhecido *jogo da velha*, correspondência essa chamada em matemática de *isomorfismo*. De fato, as cartas do primeiro jogo podem ser dispostas num quadrado mágico:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Neste quadrado, ao longo das colunas verticais, das linhas horizontais e das linhas diagonais, a soma é sempre 15 e estas são todas as possibilidades de soma 15 com as cartas do jogo. Logo, aí estão representadas todas as possíveis maneiras de ganhar o jogo, do mesmo modo que no jogo da velha.

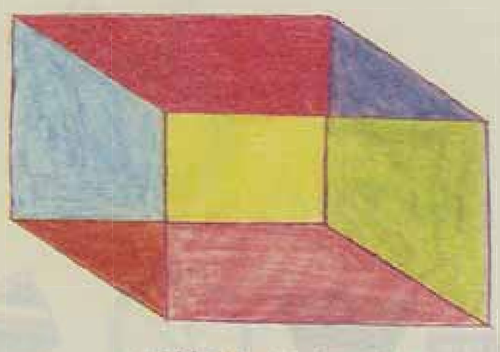
Da mesma forma, os cartões do segundo jogo podem assim ser dispostos:

TEL	LÓ	CAL
PT	PEÃO	PC
TUA	OU	CÉU

Cada trinca de palavras numa determinada linha, coluna ou diagonal, tem uma letra em comum e não existem outras trincas, além dessas, com esta propriedade. Novamente, a correspondência com o jogo da velha é flagrante.

O jogo da velha é um jogo de azar, isto é, não existe maneira de ganhar sempre. Porém, é claro que um jogador que conheça essas correspondências vai levar uma grande vantagem com relação a outro jogador que não as conhece.

Cubo



8 MEDIR

١٢٣٤٥٦٧٨٩٠
٤٥

Medir significa comparar uma grandeza com outra que tomamos como unidade. Por exemplo, podemos medir o comprimento da sala de aula e dizer que mede tantos passos, braças, etc. As medidas são expressas por *números reais*, denominação histórica ligada ao fato de exprimirem a medida de coisas do mundo concreto e não por serem mais reais do que os números naturais. Mais precisamente por números que são diferentes dos números naturais utilizados na contagem. A principal diferença entre os dois é que os números reais se referem a grandezas contínuas, enquanto os naturais representam grandezas discretas. Se perguntarmos quantos alunos estão na sala de aula, a resposta será um número natural necessariamente. Já se perguntarmos que horas são, a resposta pode não ser um número natural; pode ser qualquer coisa entre sete e oito horas, por exemplo. Naturalmente, a idéia é construir os números reais a partir dos números naturais, que passarão assim a ser um caso especial de números reais: os números inteiros. Surge daí uma característica fundamental dos números reais: em geral eles são quebrados.

Atividade 1. Meça com os alunos, utilizando passos, palmos, pedaços de ripa, etc, alguns comprimentos de objetos na sala de aula. Verificar-se-á que, geralmente, o resultado será um número não inteiro de unidades. Exprimir essa grandeza é a tarefa a ser cumprida pelos números reais. Esse é o problema a ser discutido com os alunos.

Na atividade anterior, provavelmente os alunos procuraram exprimir o número não inteiro através de expressões como palmo e meio, um terço de ripa, etc. Através da divisão da ripa em partes iguais, podemos exprimir frações da ripa: 1/4 , 1/2, 1/3 etc, que estão, como vimos, associadas à divisão. Os números reais possibilitarão que essas divisões sejam agora realizadas. Observe, porém, que não é nosso objetivo, principalmente do ponto de vista das operações, lidar com os números reais, como frações. Faremos isso exprimindo os números reais na forma decimal, evitando assim todos os algoritmos envolvidos no estudo das frações e preparando o aluno para o objetivo fundamental final: saber usar uma calculadora eletrônica que opera com números decimais e não com frações (ela não ajuda nada no cálculo do MMC.ou MDC, por exemplo).

Nesse momento, será útil estabelecer uma discussão com os alunos sobre o significado da unidade ou padrão de medida.

Atividade 2. Peça para os alunos medirem em palmos o comprimento de suas carteiras. Verificar-se-á não só que os resultados são diferentes, como também variam conforme a possibilidade de se esticar a mão para medir em palmos. Assim, o palmo não é um bom padrão de medida. Pergunte aos alunos que padrões de medida de comprimento eles conhecem. Uma ripa rígida será melhor, mas precisaria ser levada de um lugar a outro para se poder comparar comprimentos. É preciso, portanto, escolher algum padrão conhecido por todos para que se possa comparar comprimentos. Aproveite o momento para contar a história do metro cuja adoção é, inclusive, uma das conseqüências da Revolução Francesa e da expansão mundial da burguesia.

Retomando a questão da necessidade de se utilizar frações de unidade, argumente com os alunos sobre a conveniência de lidarmos com frações decimais, que significa dividir a unidade por dez, ou seja, subdividi-la em decimais. Observe que nossa representação dos números naturais foi baseada no "dez" e que seria bom que mantivéssemos essa regra posicional também para representar os números reais. Mostre como isso foi feito com o metro, subdividindo-o em decímetros. O decímetro, por sua vez, pode também ser subdividido em centímetros, e assim por diante.

Atividade 3. Discuta com os alunos o sistema métrico utilizando uma régua graduada em milímetros. Com o uso desse tipo de régua, peça para os alunos refazerem as medidas da atividade anterior.

Introduza as abreviações m, dm, cm, mm. Em seguida, utilizando o ábaco e tomando o arame inferior para representar os milímetros, mostre como essas subdivisões são análogas à numeração em unidades, dezenas, centenas, etc, utilizadas na contagem. Dessa forma, construa junto com os alunos as identidades

1 m = 10 dm

1 dm = 10 cm

1 cm = 10 mm

1 dm = 100 mm

1 m = 100 cm

1m = 1000 mm

Mostre como isso pode ser estendido também para cima no ábaco e, defina 1 km = 1000m. Aqui novamente discuta a questão da melhor unidade de medida do sistema métrico para medir, por exemplo, a altura de um homem, o comprimento de um prego, a distância entre duas cidades, etc.

Chegamos agora ao momento crucial do estudo dos números decimais: a introdução da vírgula. Se os alunos já dominam as quatro operações com os números naturais e entendem o significado da vírgula, eles não devem ter dificuldade alguma em operar com os números decimais. Por isso insista neste ponto até perceber que os alunos dominam o assunto inteiramente.

Do mesmo modo que se diz um palmo e meio ou dois passos e um quarto, diz-se também um metro e dois decímetros ou um centímetro e três milímetros. Porém, como há uma relação decimal entre essas grandezas, trocamos a conjunção *"e"* por uma vírgula, codificando essas medidas assim: 1,2m e 1,3cm, mantendo o significado da notação posicional, isto é, o algarismo que está à direita da unidade representa sempre um décimo da unidade. Assim, 1,2m = 12dm e 1,3cm = 13mm. Mostre que isso equivale a multiplicarmos por um múltiplo de dez, pois, como vimos anteriormente, multiplicar por dez significa elevarmos o produto em uma ordem.

Atividade 4. Represente no ábaco: 1,2m, 1,23m, 10,5m, 6,2cm, 0,7m, 3,23m e, desse modo, escreva todas essas medidas, uma de cada vez, em mm.

8.1 ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS DECIMAIS

Discuta com os alunos o resultado da soma de 1m com 3cm, mostrando no ábaco que o resultado pode ser escrito como 1,03m ou 103cm. Escreva essas operações na notação vertical:

$$\begin{array}{r} 100 \text{ cm} \\ \underline{+\ \ 3} \text{ cm} \\ 103 \text{ cm} \end{array}$$

que é equivalente a:

$$\begin{array}{r} 1{,}00 \text{ m} \\ +\ \underline{0{,}03} \text{ m} \\ 1{,}03 \text{ m} \end{array}$$

uma vez que: $103 \text{ cm} = 1{,}03 \text{ m}$

Dessa forma, justifique a necessidade de que, ao somarmos números decimais, além de garantirmos que estamos adicionando as mesmas unidades, devemos dispor os números no algoritmo da adição, de forma tal que as vírgulas fiquem alinhadas, completando-se as casas vazias com zeros (observe que 103 pode também ser escrito como 103,0). Esses cuidados também têm que ser tomados em qualquer outra operação com números decimais.

Atividade 5 Discuta com os alunos nosso sistema monetário, mostrando que um real pode ser escrito como 1,00 real ou 100 centavos. Faça com que os alunos exprimam em reais valores em centavos.

Proponha em seguida somas do tipo 21,3 + 7,02; 15,5 + 3, etc. para em seguida introduzir a subtração e sua prova real. É importante que estas operações também sejam realizadas na calculadora para os alunos irem se habituando ao uso da vírgula (na verdade, ponto, que é a tradição inglesa) nos aparelhos.

Atividade 6. Defina perímetro como a soma dos lados de um polígono e peça para os alunos calcularem o perímetro de algumas figuras geométricas. Inicialmente, use figuras concretas como a carteira ou um azulejo, para em seguida utilizar figuras traçadas nos cadernos. Peça para os alunos exprimirem os resultados em m, cm e mm.

9 ÁREAS

IVXLCDM

Do mesmo modo que medimos comprimentos, podemos medir áreas. Para isso, temos que ter uma unidade padrão. Esta unidade não precisa ser independente, pois ela pode ser derivada da unidade de comprimento. Assim, um quadrado com cm de lado pode ser usado como unidade valendo, apropriadamente, 1cm quadrado ou $1cm^2$, que é igual a 1cm x cm. Isto nos dá uma interpretação geométrica para a multiplicação de dois números, como a área do retângulo determinada por eles.

Atividade 1. Tome uma folha de papel quadriculado, com células de $1cm^2$, e trace vários quadrados e retângulos cujos lados tenham um número inteiro de centímetros. Mostre que o número de cm^2, isto é, a área dentro de cada figura, é igual a x b, onde a e b são os comprimentos em centímetros dos lados da figura.

Atividade 2. Utilizando uma régua, determine a área em mm^2 de cadernos, estojos, etc. Em seguida, pergunte: um cm^2 é igual a quantos mm^2 ?

Atividade 3. Tome um cordão fechado cujo comprimento tenha um número inteiro de centímetros. Usando o papel quadriculado em cm^2 mostre que esse cordão pode ser o perímetro de vários retângulos. Mostre que, entre esses retângulos de mesmo perímetro, o quadrado é aquele que tem a maior área.

Discuta com os alunos as implicações deste fato geométrico na construção de cercas.

9.1 MUDANÇA DE UNIDADES

Sobretudo devido à influência norte-americana, algumas unidades de comprimento são ainda expressas no sistema inglês, principalmente a polegada e suas frações. Por isso, às vezes, é importante fazer a conversão entre elas. Observe que os comprimentos expressos em polegadas ou centímetros de uma mesma grandeza estão sempre na mesma razão, que é a razão entre essas duas unidades. Como uma polegada é igual a 2,54cm, temos então a seguinte proporção:

$$\frac{\text{Comprimento em polegadas}}{\text{Comprimento em centímetros}} = \frac{2{,}54\ \text{pol}}{1\ \text{cm}}$$

e, portanto:

$$\text{Comprimento em centímetros} = \text{Comprimento em polegadas} \,/\, 2{,}54$$

$$\text{Comprimento em polegadas} = \text{Comprimento em centímetros} \times 2{,}54$$

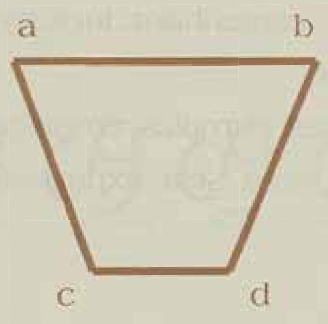
Note que o mesmo raciocínio pode ser usado na conversão já feita entre mm^2 e cm^2. Na verdade, este é o procedimento correto para a conversão de quaisquer unidades.

Atividade 4. Converta com os alunos horas em minutos, depois em segundos e vice-versa.

9.2 CUBAÇÃO

No decorrer da história, foram desenvolvidos vários métodos para medir superfícies mais complexas do que quadrados ou retângulos, muitos deles ainda usados para medir a área de terras e terrenos na cidade e no campo. Por isso, é importante fazer um levantamento para verificar o conhecimento dos alunos sobre algum ou alguns desses métodos.

Basicamente, estão reduzidos a dois os métodos ainda usados. O primeiro modela a área a ser calculada por um retângulo e o segundo por um quadrado. Vamos supor que desejemos calcular a área do seguinte lote de terreno:



Utilizando o primeiro método, aproximamos a área do terreno com a área de um retângulo de lados iguais a (a + d)/2 e (b + c)/2, isto é, construímos um retângulo cujos lados são a média dos lados opostos do quadrilátero. Assim, a área da figura será:

$$\text{Área} = (a + d) \times (b + c)/4$$

Utilizando o segundo método, aproximamos a área do terreno de um quadrado cujo lado é igual à média dos quatro lados, ou seja, (a + b + c + d)/ 4. Dessa forma, a área da figura será igual a

Área = $p^2/16$, onde p é o perímetro do quadrilátero.

Note que, através deste último método, podemos estimar áreas com mais de quatro lados e que contenham, inclusive, partes curvas, bastando determinar o perímetro do terreno.

Normalmente, essas fórmulas empíricas vêm acompanhadas de fatores que fazem com que a área seja expressa em unidades, tais como hectares, mil covas, etc.

Atividade 5. Calcule junto com os alunos a área de um terreno com 120m, 80m, 100m e 60m, utilizando os dois métodos apontados e discuta os resultados.

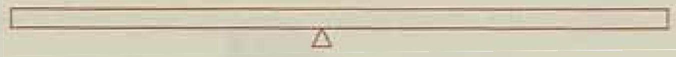
Mostre para os alunos que as medidas do problema anterior não determinam univocamente um quadrilátero, uma vez que existem infinitos quadriláteros com aquelas medidas de seus lados. Isso pode ser observado facilmente pegando quatro ripas e construindo os quadriláteros possíveis. Assim, uma maneira mais precisa de determinar a área de um terreno consiste em dividi-lo em triângulos, pois, como vimos anteriormente, eles são univocamente determinados pelos seus lados, e calcular a área do terreno como a soma das áreas desses triângulos (a área dos triângulos pode ser calculada pela fórmula de Heron: $A^2 = p/2(p/2-a)(p/2-b)(p/2-c)$.

10

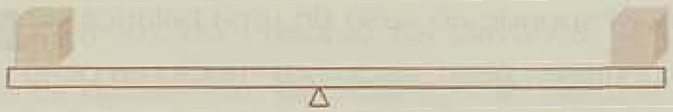
EQUILÍBRIO

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

A ciência do equilíbrio é chamada *estática*. Na construção civil, é ela que preside o projeto da obra e é constantemente vivenciada pelos operários. Considere uma tábua colocada sobre um apoio, como na figura abaixo:



Intuitivamente, por simetria, se a tábua for homogênea, devemos colocar o apoio bem no meio da tábua para que ela fique em equilíbrio. Usando o mesmo raciocínio, concluímos que a situação não muda se colocarmos dois pesos iguais nas extremidades da tábua:



Essa é exatamente a situação no caso de uma balança de braços iguais: os pesos serão iguais quando a balança estiver em equilíbrio. Se, porém, os pesos forem diferentes, como no caso de uma gangorra, para que a tábua fique em equilíbrio, a razão entre os pesos P_1 e P_2 deve obedecer à seguinte proporção:

$$P_1/P_2 = d_2/d_1$$

$$P_1/P_2 = d_2/d_1$$

onde d_1 e d_2 são as distâncias dos pesos P_1 e P_2 do centro da tábua onde está o apoio. Podemos ilustrar esta situação com a figura abaixo:

isto é, para equilibrar uma criança numa gangorra, o adulto precisa se sentar nela a uma distância do ponto de apoio tanto menor quanto maior for o seu peso. Esta situação corresponde ao caso de uma balança de braços desiguais, onde, através de um pequeno peso, podemos medir um peso muito maior.

No caso da gangorra, é claro que, se o adulto ultrapassar a distância de equilíbrio, ele jogará a criança do outro lado para o alto. Isso significa que a situação de equilíbrio é uma situação limite a partir da qual podemos estudar os casos fora de equilíbrio. Observe que podemos interpretar a figura apresentada como uma alavanca, isto é, quanto maior a distância do ponto de apoio no qual aplicamos uma força, maior é a força exercida do outro lado.

Atividade 1 Faça com que os alunos tentem equilibrar pedaços de madeira diversos com os dedos para verificar a relação aqui analisada. Em seguida, peça para eles tentarem equilibrar objetos com distribuição assimétrica de peso, como um martelo de carpinteiro, num dedo.

A atividade anterior descreve a situação intuitivamente vivenciada pelo aluno, que sabe que quanto mais perto ele segurar a extremidade do cabo do martelo, maior vai ser a força que impulsionará o prego. A relação encontrada para o equilíbrio da tábua é a expressão matemática do *princípio da alavanca*, princípio que explica o funcionamento do que chamamos máquinas simples, como a própria alavanca, a roldana, o plano inclinado. São máquinas que aumentam o poder de nossa força manual.

Atividade 2. À luz do principio da alavanca, discuta com os alunos a melhor maneira de operar com instrumentos de trabalho, tais como a enxada, a pá, a picareta, a roldana, a chave de fenda etc

BIBLIOGRAFIA

ASIMOV, Isaac – *No mundo dos números*. Rio de Janeiro, Francisco Alves, 1983.

CARAÇA, Bento de Jesus – *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1978.

CARRAHER, David, CARRAHER, Terezinha Nunes e SCHLIEMANN, Analucia – *Na vida dez, na escola zero*. São Paulo : Cortez, 1988.

CARVALHO, Dione Lucchesi – *Metodologia do Ensino da Matemática*. São Paulo: Cortez, 1990.

D'AMBROSIO, Ubiratan – *Educação Matemática : da teoria à prática*. Campinas: Papirus, 1996.

DANTE, Luiz Roberto – *Didática da resolução de problemas de matemática*. São Paulo: Ática, 1989.

DELIZOICOV, Demétrio e ANGOTTI, José André – *Metodologia do ensino de ciências*. São Paulo: Cortez, 1990.

DUARTE, Newton – *O ensino de matemática na educação de adultos*. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1986.

________ - O compromisso político do educador no ensino de matemática. In:

OLIVEIRA, Betty(org.). *Socialização do saber escolar*. São Paulo: Cortez : Autores Associados, 1987.

________ - Recriando o ábaco e o sistema de numeração. *Educação e Sociedade*, nº 20, jan/abr de 1985.

GOVERNO DO ESTADO DE SÃO PAULO. *Proposta curricular para o ensino de Matemática no 1º Grau*. São Paulo : SE/CENP, 1988.

KNIJNIK, Gelsa – *Exclusão e resistência : educação matemática e legitimidade cultural*. Porto Alegre : Artes Médicas, 1996.

LIMA, Luciano e MOISÉS, Roberto Perides – *Elementar é o essencial*. São Paulo : CEVEC/CIARTE, s.d.

MACHADO, Nilson José – *Matemática e língua materna*. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1990.

_______________ - *Matemática e realidade*. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1989.

POLYA, George – *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro : Interciência, 1978.

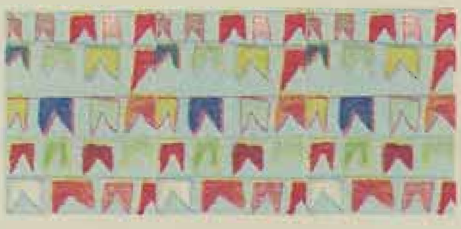
RÊGO, Rogéria Gaudêncio do e RÊGO, Rômulo Marinho do – *Matematicativa*. João Pessoa : Editora da UFPB, 1997.

SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA – *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo.

STRUIK, Dirk Jan – *História concisa das matemáticas*. Lisboa : Gradiva, 1992.

TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins – Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. *Pro-posições*, v. 4, nº 1, março de 1993.

VÁRIOS AUTORES – *Vivendo a matemática*.(Coleção). São Paulo: Scipione, 1990.



ISBN 85-237-0318-7
9 788523 703189