Pag 4 M3.5

RELAÇÕES POLÍTICO-PEDAGÓGICAS DO ENSINO DAS OPERAÇÕES DE ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO PARA EDUCANDOS ADULTOS.

Newton Duarte
abril/85.

I - APRESENTAÇÃO

Este texto descreve e analisa a Segunda Unidade de uma experiência de ensino de Matemática para alfabetizandos adultos (1). A reflexão que aqui apresento não se dirige apenas para aqueles ligados à Educação de Adultos. A maior parte dos aspectos abordados neste texto são válidos para o ensino com crianças e adolescentes.

Inicialmente analisarei os princípios norteadores dessa Segunda Unidade, mostrando que eles já estavam orientando o trabalho desde a Unidade precedente. O leitor notará que os princípios pedagógico-matemáticos e os pedagógico-gnosiológicos determinam-se em ação recíproca.

Após analisar tais princípios descreverei como realizei o ensino nessa Segunda Unidade, com os alfabetizandos do Segundo Projeto de Alfabetização de Funcionários da UFSCar (PAF-2).

Na última parte deste texto analisarei alguns aspectos da dimensão política intrínseca a essa Segunda Unidade (2).

---

(1) Sobre a Primeira Unidade vide "Recriando o Ábaco e o Sistema de Numeração" in Revista Educação e Sociedade nº 20, 1985, São Paulo.

(2) Sobre dimensão política intrínseca ao ensino da Matemática vide meu texto: O Compromisso do Educador no Ensino de Matemática, UFSCar, 1985, off-set.

II - PRINCÍPIOS NORTEADORES

1) PRINCÍPIOS PEDAGÓGICO - MATEMÁTICOS

O sistema de numeração utilizado em nossa sociedade permite representar os números seguindo os mesmos princípios contidos no ábaco e permite também que realizemos a adição e a subtração, por escrito, seguindo os mesmos princípios que orientam a realização dessas operações no ábaco. A importância de tais possibilidades torna-se mais evidente ao lembrarmos que sistemas de numeração como aqueles dos romanos e dos gregos não se baseavam nos princípios contidos no ábaco e consequentemente, os gregos e os romanos eram obrigados a utilizar a escrita apenas para registrar quantidades relativas aos cálculos a efetuar ou já efetuados. Tais sistemas de numeração eram totalmente impróprios para o cálculo sendo que calcular era uma tarefa quase que totalmente dependente do ábaco. Na medida em que nosso sistema de numeração incorpora os mesmos princípios do ábaco, ele possibilita que realizemos os cálculos com ou sem a utilização desse instrumento.

HOGBEN (1946: 310) explica:

> *"Efetuar mentalmente, ou 'de cabeça', na linguagem da fisiologia moderna, significa que o cérebro recebe, das pequenas variações de tensão dos músculos da órbita e dos dedos (órgãos de contagem), a mesma seqüência de mensagens nervosas que acompanham o trabalho no ábaco. Por exemplo, 'vão dois' quer dizer que esgotamos por duas vezes as contas de uma coluna e temos, pois, de colocar duas contas na coluna vizinha da esquerda, para nos lembrarmos do fato. Isto só é possível, porque o emprego do 0 (zero) ou 'sunya', para representar a coluna vazia, faz o número de algarismos igual ao número de colunas do ábaco."*

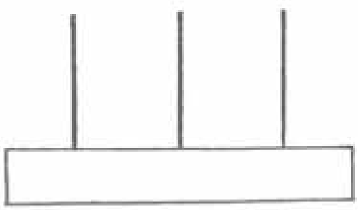
Na Primeira Unidade da experiência que realizo com alfabetizandos adultos, fiz com que o aprendizado do sistema de numeração fosse por eles desenvolvido através de um processo onde eles seguissem em essência as etapas percorridas pela humanidade para a criação desse siste ma de numeração. Nesse processo procurei levar aqueles educandos a constatarem, no seu próprio aprendizado, que os princípios do ábaco e do sistema decimal de numeração posicional utilizado em nossa sociedade são os mesmos. Por exemplo: constatando que do mesmo modo que no ábaco, uma conta na coluna das dezenas tem um valor correspondente a dez contas da coluna das unidades, assim também, no sistema decimal de numeração posicional, o algarismo 1 (um) estando na casa das dezenas, tem um valor equivalente a dez vezes aquele valor que esse mesmo algarismo tem na casa das unidades (princípio do valor posicional).

E se o modo como efetuamos, por escrito, adições e subtrações, também se baseia no trabalho feito no ábaco, isso implica em que os princípios pedagógico-matemáticos da Segunda Unidade, descrita e analisada neste texto, já estavam contidos, de certa maneira, na Primeira Unidade.

Tais princípios são os seguintes:

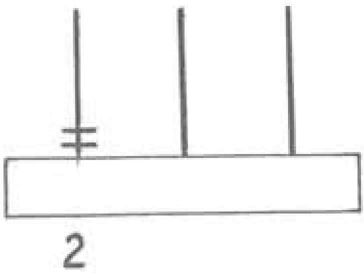
1.a) A Adição e a Subtração são Inseparáveis Enquanto Operações Inversas.

Esse princípio já estava presente quando se exercitava a representação dos números na Unidade anterior. Pensemos, por exemplo, na representação do número duzentos e trinta e um, no ábaco. Inicialmente o ábaco estaria vazio.



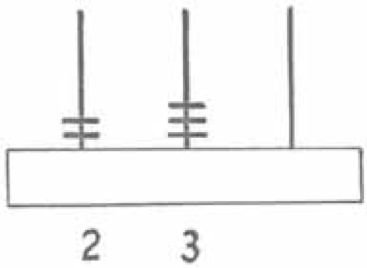
A seguir, seriam colocadas duas contas na coluna das centenas.

Ver figura na próxima página.



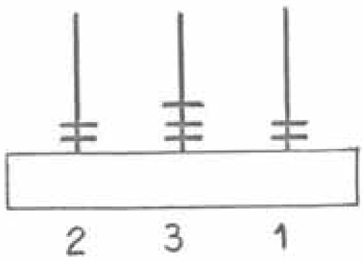
O raciocínio que então se faz, de uma maneira quase automática, é o de que 231 - 200 = 31, faltando portanto 31 para a representação do número pretendido.

O procedimento seguinte poderia ser o de se adicionar 3 contas na coluna das dezenas.



Raciocínio implícito: 200 + 30 = 230
231 - 230 = 1

Ainda falta, portanto, uma unidade para ser representado o número em questão.



230 + 1 = 231

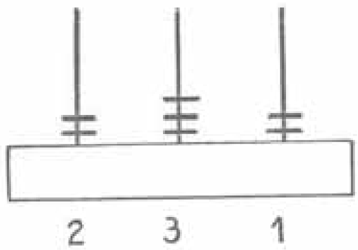
Ao mesmo tempo que foi se acrescentado, isto é, adicionando as quantias às colunas vazias, foi se subtraindo do número pretendido as quantidades acrescentadas.

0 + 200 (231-200); 200 + 30 (31 - 30); 230 + 1 (1 - 1).

Como pode ser visto por esse simples exercício de representação de um número no ábaco, a adição e a subtração são operações opostas indissoluvelmente ligadas.

1.b) O Valor Posicional *dos Algarismos e a* relação de correspondência um-para-dez *são de Fundamental Importância para os Algoritmos da Adição e da Subtração.*

Para representar no ábaco o número duzentos e trinta e um, atribuímos às contas da coluna das dezenas um valor correspondente a dez da coluna das unidades e às contas da coluna das centenas um valor correspondente a dez da coluna das dezenas e a cem da coluna das unidades. O mesmo ocorre com o valor dos algarismos no sistema decimal de numeração posicional. No número tomado como exemplo, o algarismo 2 assume um valor correspondente a duas centenas ou 20 dezenas ou 200 unidades; o algarismo 3 assume um valor correspondente a 3 dezenas ou 30 unidades e o algarismo 1 assume o valor de 1 unidade.

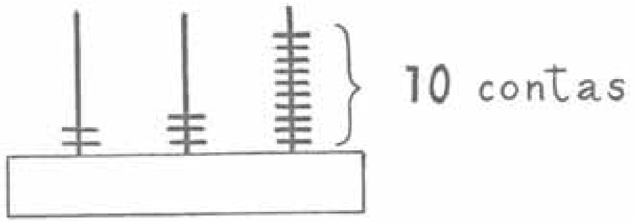


231 = 200 + 30 + 1

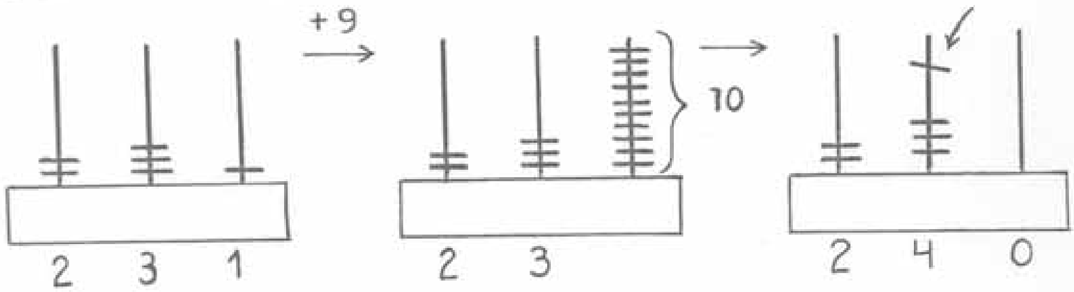
Para a representação desse número, seja no ábaco ou seja através do sistema de numeração, são utilizados, como se pode notar pelo exposto acima, o princípio de valor posicional e a relação de correspondência um-para-dez.

A importância disso para os algoritmos de adição e subtração ficará ressaltada pelo exemplo a seguir. Se adicionarmos 9 unidades ao número utilizado no exemplo acima (231), obteremos um total de dez contas na coluna das unidades.

Ver figura na próxima página.



Com base na relação de correspondência um-para-dez e no valor posicional, retiramos essas dez contas da coluna das unidades e, correspondendo a essas dez, é adicionada uma conta às da coluna das dezenas.

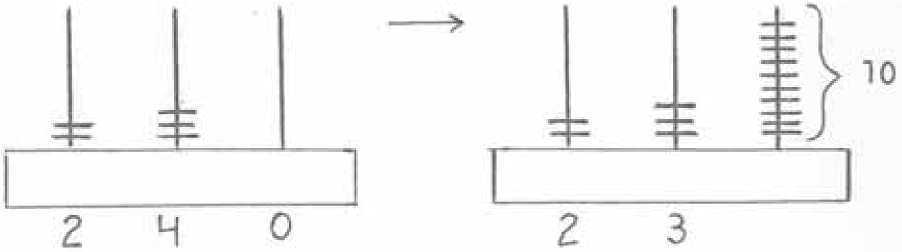


Eis aí a justificativa do procedimento chamado "vai-um" do algoritmo da adição.

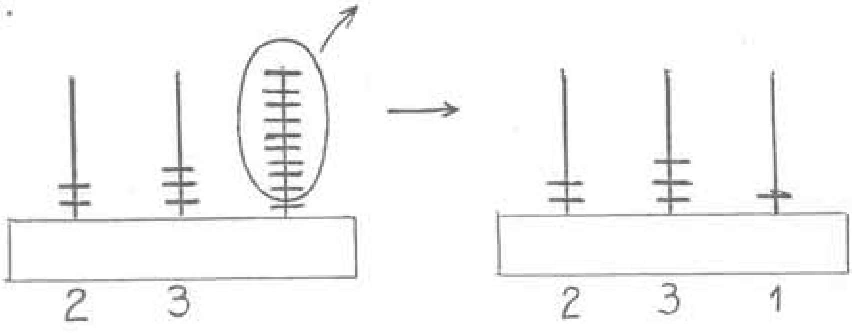
$$\begin{array}{r}231\\ \underline{9}\end{array}+ \longrightarrow \begin{array}{c}9+1=10\\ \text{"vai-um"}\end{array} \longrightarrow \begin{array}{r}1\\ 231\\ \underline{9}\\ 0\end{array}+ \longrightarrow \begin{array}{r}1\\ 231\\ \underline{9}\\ 240\end{array}+$$

O mesmo ocorre com o oposto do "vai-um", que é o "empresta-um".

Se de 240 queremos subtrair nove unidades, retiramos uma conta da coluna das dezenas e trocamo-la por dez que são colocadas na coluna das unidades.



Dessas dez, podemos então subtrair as nove unidades.



É o que acontece no algoritmo da subtração:

$$\begin{array}{r} 240 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \text{troca-se uma dezena por dez unidades.} \longrightarrow \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,10} \\ 2\cancel{4}0 \\ -\ \ 9 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle 3\,10} \\ 2\cancel{4}0 \\ -\ \ 9 \\ \hline 231 \end{array}$$

Como se pode ver, o valor posicional e a relação de correspondência um-para-dez são fundamentais na compreensão dos algoritmos da adição e da subtração.

2 - *PRINCÍPIOS PEDAGÓGICO-GNOSIOLÓGICOS*

(relativos ao processo de ensino-aprendizagem e ao processo de aquisição do conhecimento pela humanidade)

2.a) *O Inter-Relacionamento das Etapas do Aprendizado Reflete a Essência do Movimento da Realidade.*

A realidade não é formada de módulos estanques e separados. Ao contrário, ela constitui-se num processo onde cada etapa traz em si elementos da etapa precedente e também já gera em seu interior a etapa que a precederá.

Para que esse movimento se refletisse no aprendizado da Matemática, procurei fazer com que os educandos adquirissem o conhecimento matemático através de uma reprodução das linhas essenciais da evolução desse co nhecimento na história da humanidade. Na Primeira Unidade dessa experiência, o ábaco e o sistema de numeração não foram captados apenas enquanto produtos já acabados, mas enquanto produtos que fazem parte de um processo de criação dos sistemas de registro de contagem. O ábaco e o sistema de numeração (apresentados na Primeira Unidade, surgiram na história da humanidade, para satisfazer a necessidade de registro) já trazem em si as possibilidades e as diretrizes da satisfação da necessidade de calcular. Na Primeira Unidade a necessidade que precisava ser satisfeita era a de contagem e registro dessa contagem. Na Segunda Unidade a necessidade que precisa ser satisfeita é a de adicionar e subtrair. Os instrumentos desenvolvidos na Primeira, o ábaco e o sistema decimal de numeração posicional, já trazem as diretrizes para o desenvolvimento dos instrumentos que permitirão a satisfação das necessidades da Segunda Unidade. Isso se dá porque, como já disse, a realidade é um processo onde as etapas se inter-relacionam numa ação recíproca, e o conhecimento dessa realidade também é um processo onde as etapas se inter-relacionam em ação-recíproca.

2.b) *A Realidade e o Conhecimento dela Baseiam-se na Oposição e Unidade dos Contrários.*

Juntar e separar, adicionar e subtrair, multiplicar e dividir são três relações entre opostos, sendo que as duas últimas são formas surgidas da primeira, que é juntar e separar.

O registro no ábaco e no sistema de numeração baseia-se na constante realização dos movimentos opostos de juntar e separar. Movimentos realizados pelas mãos e pelo cérebro. Já mostrei isso no exemplo dado anteriormente (na representação do número duzentos e trinta e um no ábaco).

Os algoritmos da adição e da subtração es tão repletos de exemplos dessa unidade de contrários, como mostrei com os procedimentos chamados "vai-um" e "empresta-um".

Na Terceira Unidade da experiência que realizo, a multiplicação e a divisão são trabalhadas através da sua relação de operações opostas.

Esse princípio da oposição e unidade dos contrários faz com que este trabalho discorde da proposta de se trabalhar primeiramente a adição e a multiplicação e depois a subtração e a divisão.

A Matemática, assim como todo conhecimento humano, será tão mais representativa da realidade, quanto mais refletir essa oposição e unidade de contrários que é a força motriz de todo processo dessa realidade.

Como diz Vieira Pinto (1979: 189):

> *"A oposição entre os contrários não significa uma relação externa entre coisas distintas, mas constitui uma característica constante da essência de cada coisa, e em tal sentido tem de figurar no conceito que o pensamento cria a respeito dela. A contradição dialética ingressa no plano do pensar não com o significado de sinal de inverdade, mas ao contrário como a prova de veracidade da idéia, da sua boa qualidade enquanto reflexo do objeto existente, que menciona. Se não trouxesse em si, no interior do conceito, a contradição lógica (não a formal, porém a dialética), aí então é que se mostraria incorreta e falsa, pois apresentaria a coisa, que deve refletir, sem a nota lógica objetiva essencial, a contradição interna, que a explica em sua origem, em sua realidade de ser em movimento, em transformação, na condição atual e nos efeitos futuros."*

III - O ENSINO

Apresentarei, a seguir, a seqüência de passos seguidos na Segunda Unidade. Nessa seqüência procurei com que os educandos captassem, através do seu fazer, aqueles princípios descritos acima. Uma observação: o tempo requerido para percorrer, com os educandos, cada passo da se qüência descrita abaixo, é variável de acordo com as características próprias de cada situação (como horas diárias disponíveis, período fixado para o trabalho de ensino, ritmo de aprendizagem dos educandos, etc).

PRIMEIRO PASSO: *Adição e Subtração no Ábaco* (sem "vai-um" e sem "empresta-um")

Material utilizado: dois ábacos para cada educando e para o professor.

Neste Passo os educandos realizaram uma série de adições e subtrações com o auxílio de dois ábacos. Não escreveram as operações no caderno e elas também não foram escritas na lousa. O objetivo desse Passo foi desenvolver o domínio dos movimentos (das mãos e do cérebro) contidos na realização de adições e subtrações no ábaco, como forma de preparar para a realização de operações por escrito. Fiz com que os educandos trabalhassem com dois ábacos para que no início da adição ficassem registradas as duas parcelas a serem somadas. Trabalhando-se apenas com um ábaco e não estando escritas as parcelas a serem somadas e/ou subtraídas, os educandos teriam de guardá-las de memória durante toda a operação o que poderia dificultar o cálculo.

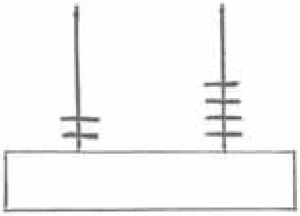
Foi dado grande atenção à relação de oposição entre as duas operações. Após a realização de cada adição era realizada a sua oposta, a subtração.

As propriedades das operações foram trabalhadas de forma empírica. Por exemplo, na adição 24 + 35, a propriedade comutativa pode ser trabalhada adotando-se diferentes ordens para realizar a adição e constatando-se que o resultado não se altera.

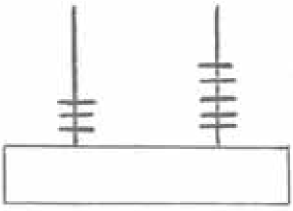
Para dar uma idéia da dinâmica adotada neste Passo descreverei como realizei com os educandos as operações:

$$35 + 24 = 59$$
$$59 - 24 = 35$$

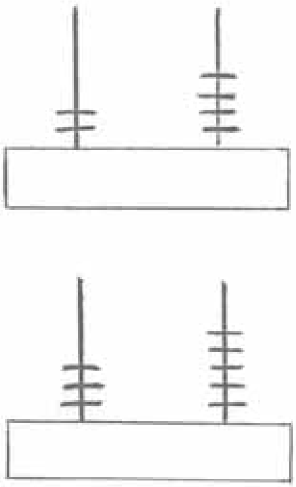
a) Solicitei aos educandos que representassem num ábaco o número 24.



b) Solicitei que representassem em outro o número 35.



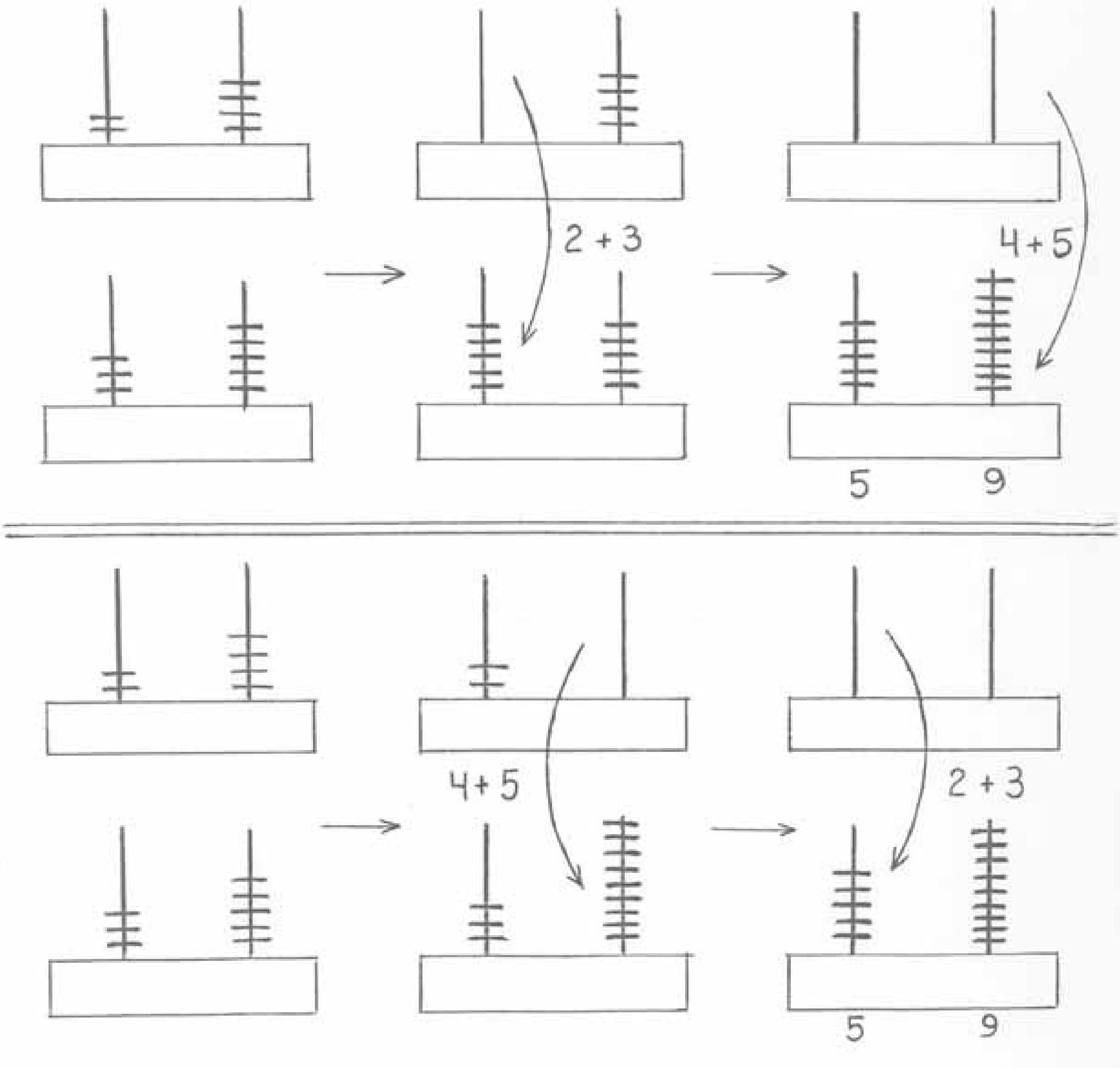
c) Solicitei que colocassem os ábacos alinhados da seguinte maneira:



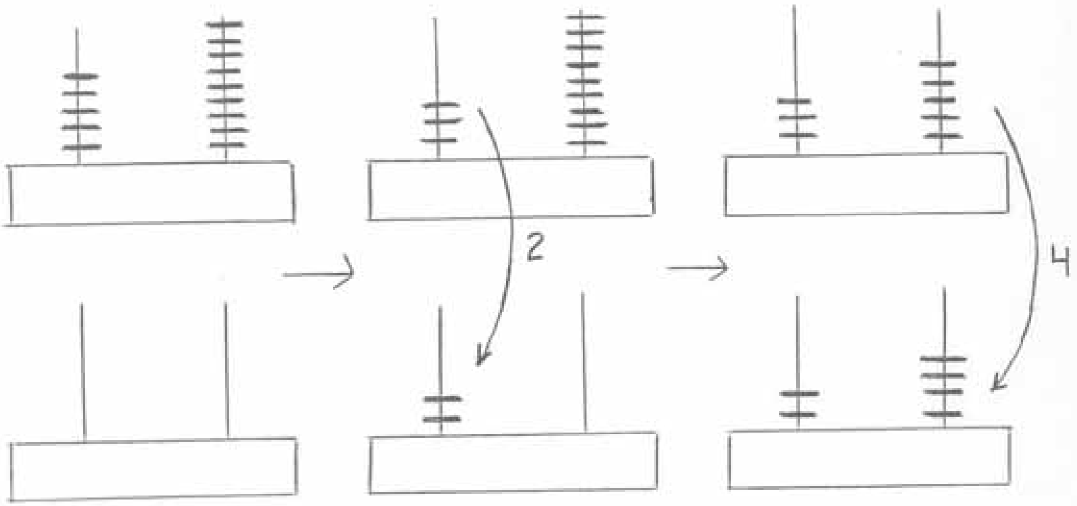
Orientei para que a coluna das unidades de um ábaco ficasse alinhada à coluna das unidades de outro (o mesmo com a das dezenas). Isso é importante pois prepara para a futura montagem do algoritmo.

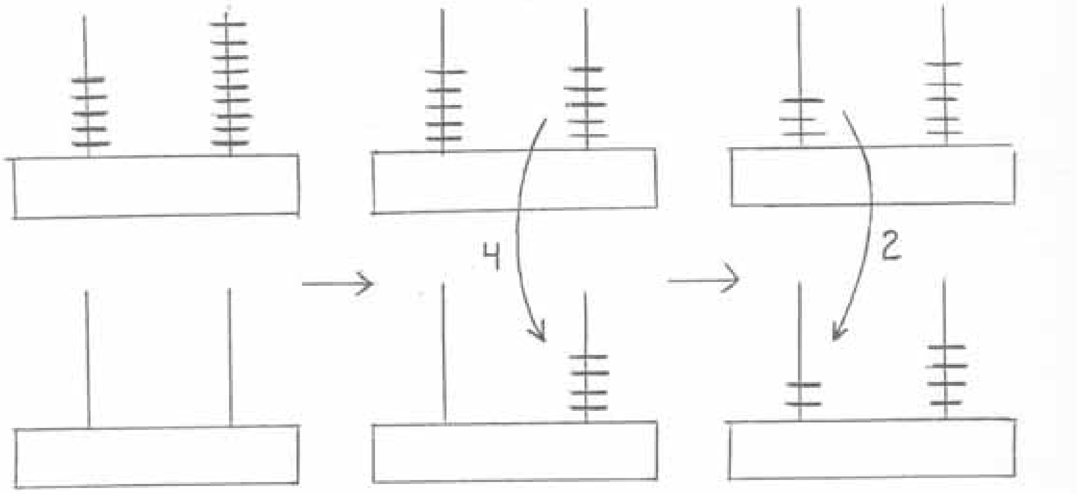
d) Solicitei que eles "juntassem" aquelas quantidades em um ábaco só.

e) Após todos terem realizado a operação, solicitei que um deles dissesse como tinha feito. Aproveitei essa ocasião para ir representando no meu ábaco grande, colocada de frente para os educandos, as parcelas e realizando a adição. Depois repeti a operação, somando em outra ordem, para trabalhar com a propriedade comutativa da adição.



f) Num dos ábacos estava, portanto, representado o número 59. Para a realização da operação oposta, solicitei que os educandos tirassem 24 desse 59, colocando o 24 no ábaco que havia ficado vazio e verificando quanto restara no outro ábaco.





Dessa maneira ficou bastante acentuada a relação entre as operações de adição e subtração. A seguir listo algumas das adições e subtrações realizadas neste Passo:

1) 43 + 5	2) 90 + 6	3) 21 + 32	4) 143 + 6
48 - 5	96 - 6	53 - 32	149 - 6

5) 201 + 50
251 - 50

6) 462 + 26
488 - 26

7) 602 + 111
713 - 111

8) 1.021 + 142
1.163 - 142

9) 20.403 + 6.362
26.765 - 6.362

Esse momento também é aproveitado para dar continuidade aos exercícios de representação de números realizados na Primeira Unidade. Esse é o motivo pelo qual utilizei números com várias casas decimais e vários números com zero.

Como pode ser visto nesses nove exercícios listados acima, era realizada, após cada adição, pelo menos uma subtração, enquanto movimento oposto dessa adição. Na medida em que os educandos já estejam dominando essa relação entre as operações inversas, pode-se realizar uma segunda subtração. Por exemplo, no exercício 9, além da subtração 26.765 - 6.362, poderia também ser realizada a subtração 26.765 - 20.403.

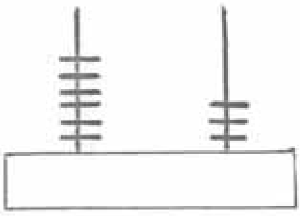
SEGUNDO PASSO: Adição e Subtração (Operações no Ábaco e Escrita das Operações na Forma Horizontal).

Neste Passo foram combinados os sinais de + , - e = (depois descreverei como isso foi feito) e as adições e subtrações passaram a serem escritas na lousa (pelo professor) e no caderno (pelos educandos).

A escrita teve, neste Passo, a função de apenas registrar as operações a serem realizadas ou já realizadas. Não teve ainda, nesse momento, a função de servir aos cálculos. Estes foram realizados no ábaco.

Para a introdução dos sinais, procurei salientar a função dos mesmos na comunicação escrita e a necessidade de padronização dos símbolos matemáticos também em função dessa comunicação. A dinâmica adotada para isso foi a seguinte:

a) Combinei com os educandos que iria escrever um número na lousa, sendo que nem eu nem eles leríamos o número em voz alta e cada um teria que representar aquele número no ábaco. O número escrito na lousa foi 63. Sua representação no ábaco é a seguinte:



b) Após todos terem feito a representação no seu ábaco, pedi que eles dissessem que número era aquele e representei o número no ábaco grande aproveitando a oportunidade para fazer com que os que erraram explicitassem e analisassem seu raciocínio.

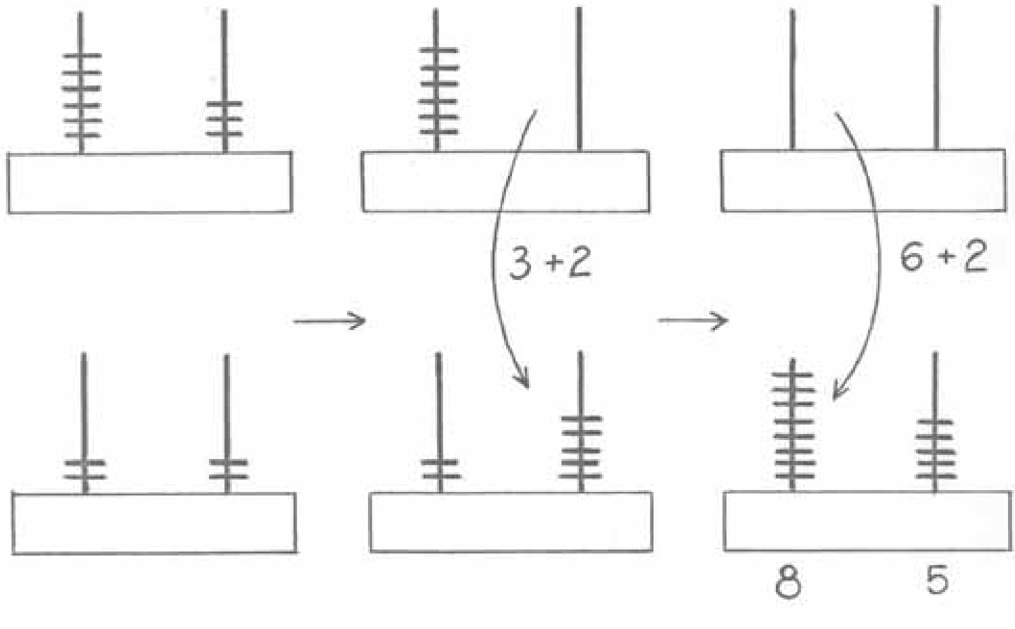
c) Escrevi outro número, à direita do 63, conservando um intervalo (para posterior colocação do sinal +). Foi combinado que também esse número não seria, num primeiro momento, lido em voz alta e cada um o representaria num segundo ábaco. Esse segundo número foi 22. Na lousa, os dois números ficaram dispostos da seguinte maneira:

63 22

d) Após todos terem terminado, representei o 22 num segundo ábaco grande.

e) Solicitei que os educandos alinhassem as colunas dos ábacos e juntassem as duas quantidades num ábaco só.

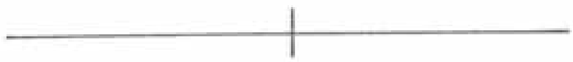
Ver figura na próxima página.



f) Fiz a adição nos ābacos grandes e escrevi o resultado na lousa, deixando um espaço para a colocação do sinal = .

63 22 85

g) Expliquei, então, que assim como escrever os nūmeros 63 e 22, na lousa, havia possibilitado que eles fossem representados no ābaco sem necessidade de comunicação oral, havia também a necessidade de se utilizar alguma forma de comunicar, por escrito, "o que era para fazer com aqueles nūmeros". Perguntei se algum deles conhecia o sinal que é utilizado para se somar os números e eles sugeriram vários tipos de sinais. Expliquei então que, em princípio, não seria errado adotar algum daqueles sinais, na medida em que isso é uma questão de convenção, isto é, de se combinar um sinal comum a todos. O sinal em si mesmo não é certo nem errado. O que faz com que seja errado adotarmos qualquer sinal para as operações de adição e de subtração é a necessidade de comunicação. Por essa necessidade é que utilizamos, para a adição, o sinal + , já convencionado. Expliquei ainda que esse sinal não foi sempre utilizado e que outros sinais foram adotados em outras épocas [3]. Expliquei que quando esse sinal apareceu ele era escrito assim:



Com o tempo ele foi simplificado para a forma que hoje utilizamos. Com isso procurei mostrar que os símbolos matemáticos não têm aquela dimensão quase mágica que muitas pessoas lhes atribuem, mas são resultado de uma necessidade concreta de comunicação.

A seguir escrevi o sinal entre o 63 e o 22.

63 + 22   85

Só faltava combinar um sinal para mostrar que o 85 era resultado daquela adição. Introduzi o sinal = .

63 + 22 = 85

h) Solicitei que eles escrevessem essa expressão matemática no caderno. Orientei para que o sinal + fosse feito o mais corretamente possível, para não criar, depois, confusão com o sinal X (multiplicação). Esse detalhe pode parecer insignificante, mas sendo, o sinal, um instrumento de comunicação, escrevê-lo incorretamente pre-

---

(3) Sobre a evolução dos sinais vide DANTZIG, 1970: pp. 78-79, MALBA TAHAN, 1983: pp. 29-36.

judica a eficácia desse instrumento. Alguns educadores poderão considerar "autoritária" tal atitude. Ela seria autoritária se fosse uma imposição sem significado, que o educando tivesse que aceitar sem compreender os motivos. Mas, na medida em que se procura mostrar a necessidade que gera a utilização do sinal, de maneira nenhuma pode ser considerado "autoritarismo" insistir para que os educandos façam o sinal corretamente.

i) Procedimentos análogos àqueles acima expostos foram utilizados com a subtração 85 - 22 = 63.

Essa linguagem escrita foi então exercitada com a realização de várias adições e subtrações. Eu escrevia na lousa a operação a ser realizada, eles a escreviam no caderno, realizavam-na no ábaco e escreviam o resultado no caderno.

Eis algumas das operações realizadas:

1) 604 + 2
606 - 2

2) 525 + 34
559 - 34

3) 1.023 + 136
1.159 - 136

4) 24.001 + 5.697
29.698 - 5.697

No item 4, ao invés de escrever a operação na lousa, eu a ditei, para que eles a anotassem no caderno e a seguir a resolvessem no caderno. A função disso é a de exercitar a relação entre o que se fala e o que se escreve com os sinais matemáticos.

TERCEIRO PASSO: *Adição e Subtração (Ábaco, Algoritmos e Dedos).*

Neste Passo a escrita passou a ser utilizada para o cálculo. Já tendo sido treinados no ábaco os movimentos de raciocínio necessários aos algoritmos de adi ção e subtração e já tendo sido introduzida parte da simbologia, tornou-se bastante simples a introdução dos algoritmos.

Além da utilização do ábaco para auxiliar a compreensão do cálculo pelo algoritmo, também utilizei com os educandos o procedimento de contar nos dedos. Esse procedimento tem a função de auxiliar o educando quando ele ainda não memorizou os fatos básicos da adição. Fatos básicos são as adições de duas parcelas onde as parcelas têm apenas uma casa decimal, isto é, as parcelas vão de zero a nove. Sua memorização é importante para a agilidade nos cálculos. Neste Terceiro Passo a memorização dos fatos básicos ainda não foi exercitada intensivamente porque entendo que ela se faz com muito mais eficiência quando os educandos já estão realizando adições através dos algoritmos, ainda que utilizando meios auxiliares como a contagem nos dedos. A memorização dos fatos básicos mostra-se então para o educando como uma necessidade para o aperfeiçoamento do cálculo. De forma alguma considero desnecessária a memorização no aprendizado da Matemática. Mas entendo que ela deva ser percebida pelo educando enquanto uma <u>necessidade decorrente de um processo</u>.

A Escola Tradicional não errou por utilizar a memorização, errou por torná-la um procedimento desvinculado das necessidades que o geraram. A Escola Nova, tentando superar essa falha, acabou por cair em outro unilateralismo: a abominação da memorização e do treino, que passaram a ser considerados desnecessários e repressivos.

A compreensão e o treino (que visa a memorização, a automatização) não podem ser vistos separadamente no processo de aprendizagem. Quando o educando está resolvendo uma adição utilizando-se dos dedos e do ábaco, isso está ao mesmo tempo desenvolvendo sua compreensão do algoritmo e treinando-o na memorização dos fatos básicos. Evidentemente que em alguns momentos dá-se maior destaque à compreensão e em outros ao treino. Mas quando se procura compreender algo, isso está contribuindo para o seu treino e quando se treina algo, isso está contribuindo para uma compreensão maior e mais segura. O treino será tão mais eficiente quanto mais se compreender o que se está treinando. E compreender-se-á com muito mais profundidade e facilidade aquilo que foi bem treinado.

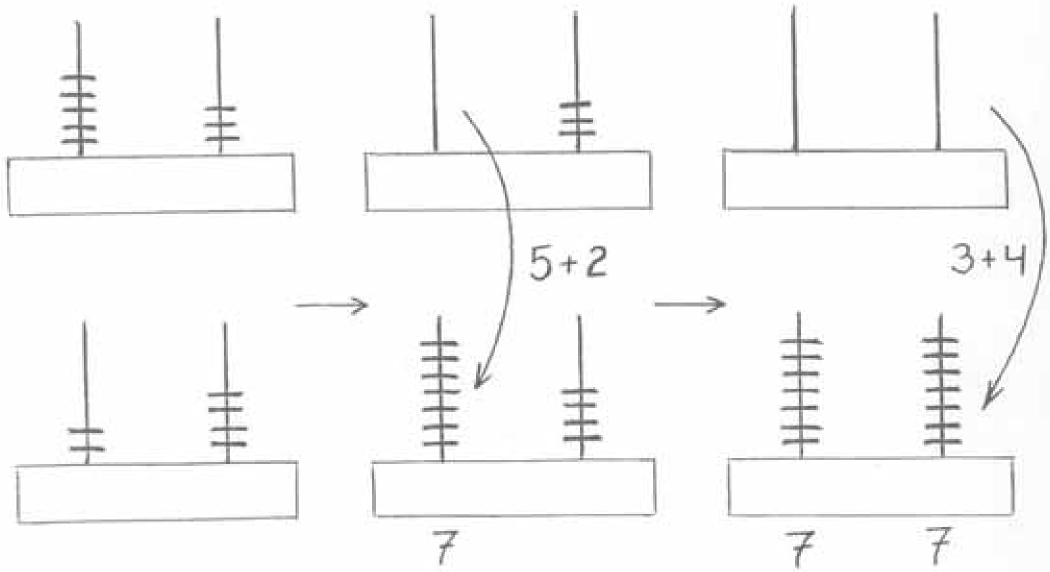
Embora o procedimento de contar nos dedos não fosse estritamente necessário neste Passo, pois o ábaco já é suficiente para o auxílio nos cálculos, utilizei os dedos com os educandos como uma maneira de prepará-los para o Quarto Passo, onde o ábaco não é utilizado.

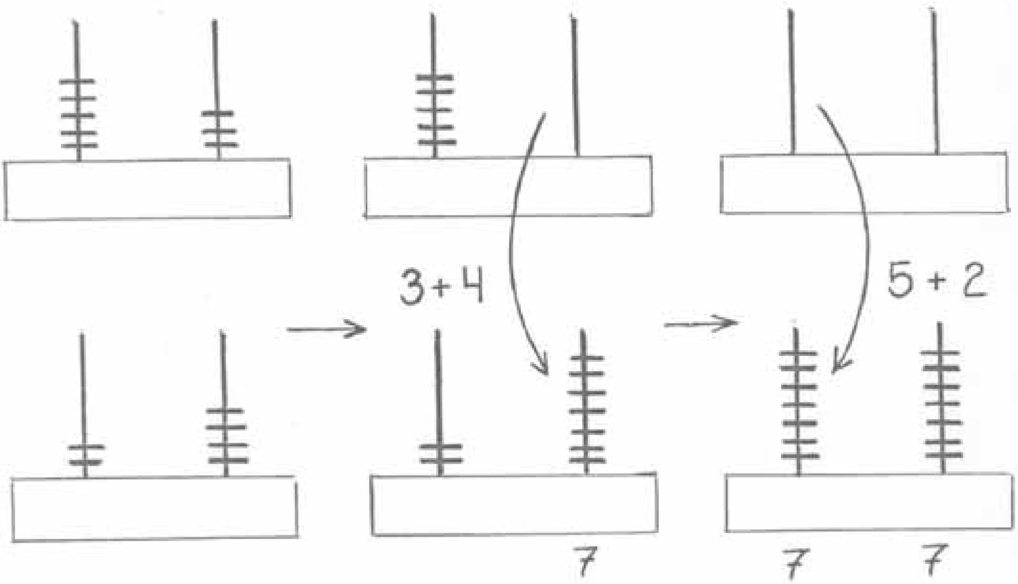
A dinâmica adotada para a introdução dos algoritmos foi a seguinte:

a) Solicitei oralmente aos educandos que escrevessem a adição 53 + 24 na forma introduzida no Passo anterior, isto é, horizontalmente.

b) Após todos terem anotado tal adição nos seus cadernos, escrevi-a na lousa, solicitando a um dos educandos que me fosse "orientando" na escrita dos números e do sinal.

c) Solicitei que eles representassem cada um daqueles números em um ábaco, depois alinhassem as colunas e então juntassem as duas quantias em um só.





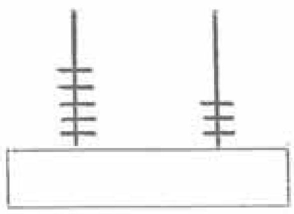
d) Fiz a operação com os ábacos grandes.

e) Solicitei que colocassem o sinal de igualdade e o resultado.

f) Após todos terem feito, fiz o mesmo na lousa:

53 + 24 = 77

g) Então expliquei que iríamos "armar" a mesma conta na forma vertical. Esvaziei os dois ábacos grandes e num deles representei o número 53. Escrevi depois esse número na lousa.



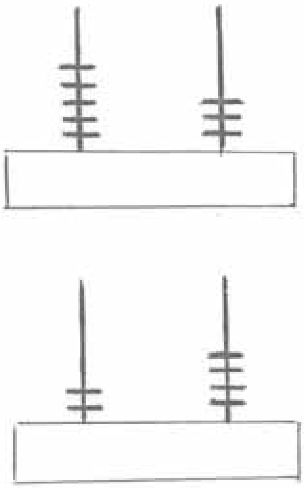
53

No Ábaco

Na lousa

No outro ábaco representei o número 24, coloquei-o com as colunas alinhadas com as do primeiro ábaco e escrevi o número 24 debaixo do 53. Chamei a atenção para o fato de que, da mesma maneira como vinhamos colocando as colunas dos ábacos alinhadas, também na escrita colocaríamos as casas decimais alinhadas, para facilitar o cálculo:

No Ábaco   Na Lousa



53

24

Como o sinal já era conhecido, coloquei-o ao lado dos números.

$$\begin{array}{r} 53 \\ +\ \ 24 \end{array}$$

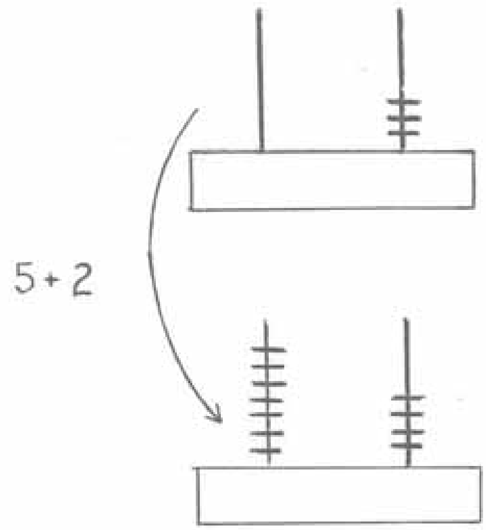
Mostrei, na conta escrita horizontalmente, o sinal = e perguntei se alguns deles teriam alguma idéia de como se costuma fazer na forma vertical. Deram várias sugestões, algumas bastante válidas como:

$$\begin{array}{r} 53 \\ +\ \ 24 \\ = \ \ \ \ \end{array}$$

Expliquei que tal modo de escrever não seria errado, mas como não é utilizado em nossa sociedade, ele não cumpre a função de comunicação. Coloquei então o traço utilizado costumeiramente:

$$\begin{array}{r} 53 \\ +\ \ \underline{24} \end{array}$$

Juntei as contas das colunas das dezenas num só ábaco.



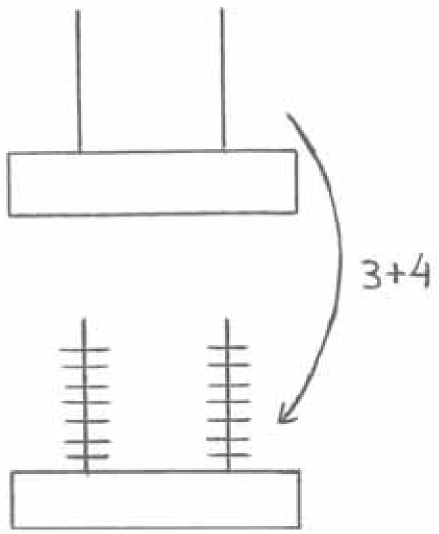
Apontando, no algoritmo já armado, a adição 5 + 2, fiz a adição, agora nos dedos e escrevi o 7 na coluna das dezenas.

$$\begin{array}{r} 53 \\ +\ \underline{24} \\ 7\ \end{array}$$

Expliquei que, no ábaco, quando se soma as duas parcelas, elas somem e fica apenas o resultado, sendo que quando se resolve a conta por escrito as parcelas continuam registradas e se escreve abaixo o resultado. Expliquei ainda que o 7 foi escrito na direção do 5 e do 2 para ficar mais fácil de perceber que ele está na mesma casa.

Somei, então, no ábaco, as unidades:

(Ver figura na próxima página)



Fiz o mesmo com os dedos e no algoritmo:

$$\begin{array}{r} + \; 53 \\ \underline{24} \\ 77 \end{array}$$

Depois fiz a mesma operação começando pela casa das unidades. Expliquei que o resultado não se altera se começarmos por uma casa ou por outra, mas que mais para a frente iriam surgir casos em que fica mais fácil, quando se opera por escrito, iniciar pelas unidades. Essa situação se deu quando, num dos Passos posteriores, surgiu a adição com vai-um, onde é possível operar-se por escrito começando pela casa das dezenas, ou das centenas, etc, mas fica mais fácil começando pelas unidades. No ábaco isso não acontece.

Procedimentos análogos foram adotados para montar o algoritmo da subtração:

$$\begin{array}{r} - \; 77 \\ \underline{24} \end{array}$$

Darei, a seguir, uma série de adições e subtrações que foram realizadas com os educandos:

1) 214 + 43	257 − 43	2) 1.042 + 354	1.396 − 354
3) 2.503 + 432	2.935 − 432	4) 6.045 + 3.604	9.649 − 3.604
5) 26.032 + 10.715	36.747 − 10.715		

A dinâmica adotada para cada conta dessas foi a seguinte:

a) Eu escrevia a conta na lousa, na forma vertical.
b) Os educandos resolviam-na no ábaco.
c) Eles armavam o algoritmo.
d) Resolviam a conta, por escrito, usando os dedos, se necessário.
e) Eu a resolvia nos ábacos grandes e na lousa (usando os dedos).

QUARTO PASSO: Adição com Vai-Um e Subtração com Empresta-Um.

Neste Passo, mais do que nunca, ficaram salientadas a importância do ábaco para se compreender o cálculo escrito e a importância de se trabalhar a relação entre as operações inversas.

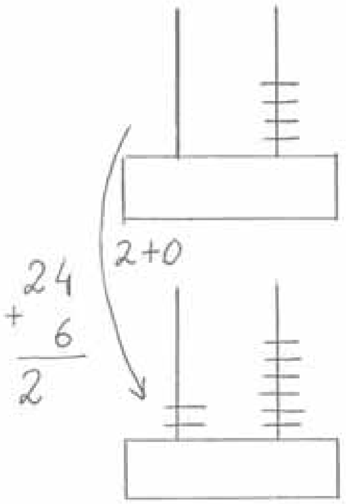
Iniciei este Passo assim:

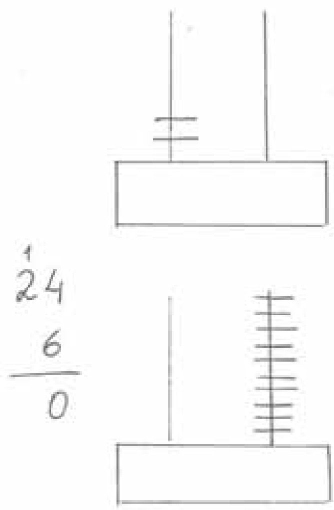
a) Solicitei que os educandos representassem num ábaco o número 24 e noutro o número 6.

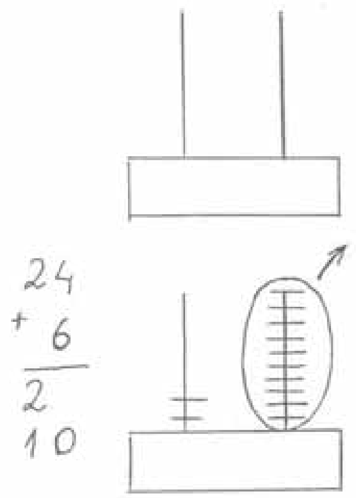
b) Solicitei que alinhassem suas colunas e realizassem a adição. Surgiu então a questão de se chegar a dez contas na coluna das unidades. Facilmente foi recordado pelos próprios educandos que uma conta da coluna das dezenas corresponde a dez da coluna das unidades e então, foram retiradas as dez contas e colocada uma na coluna das dezenas.

Armei o algoritmo na lousa e fui resolvendo-o ao mesmo tempo que operava no ábaco. Fiz a conta tanto começando pelas dezenas quanto começando pelas unidades, para mostrar que as duas maneiras são possíveis, mas que começando pelas unidades fica mais fácil, quando se opera por escrito.

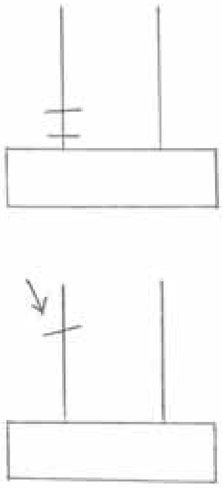
(Ver figura na próxima página)

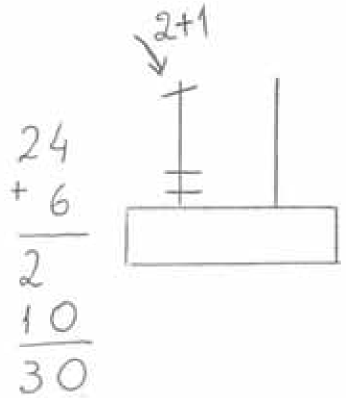


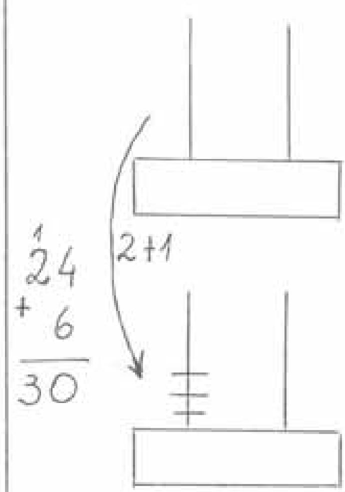




troca-se as dez unidades por uma dezena (vai-um).







Como se pode observar, no ābaco ē indiferente somar começando pelas dezenas ou pelas unidades. No caso do cālculo escrito, não ē errado começar pelas dezenas, mas ē mais prātico começar pelas unidades, principalmente em contas onde as parcelas vão atē as casas de unidade de milhar, dezena de milhar, etc.

c) A seguir, apaguei o algoritmo escrito na lousa e solicitei que os educandos fizessem essa conta em seus cadernos.

Fiz com os educandos, a operação inversa da seguinte forma:

a) Estando representado o nūmero trinta em um ābaco, solicitei que os educandos tirassem seis desses trinta, para colocar no outro ābaco, que se encontrava vazio.

b) Nessa operação, de inīcio eles encontraram alguma dificuldade, pois não sabiam como tirar seis daqueles trinta (representados por três dezenas).

Desenvolvi então, com os educandos, uma conversa semelhante ā descrita abaixo:

- Quanto tem na coluna das unidades?
  Nada (zero).
- Quanto tem na coluna das dezenas?
  Três.
- Cada bolinha dessa vale por quantas das unidades?
  Por dez.
- De onde vamos tirar seis?
  Das unidades não dā porque a coluna estā vazia. Das dezenas também não dā porque cada uma vale dez e tirando uma jā passa de seis.
- Naquela conta que fizemos antes, o que aconteceu quando juntamos 6 bolinhas com 4 bolinhas aqui nas unidades?
  Somamos dez bolinhas. Tiramos as dez e colocamos uma nas dezenas.
- E se agora nōs fizermos o caminho de volta, isto ē, qui

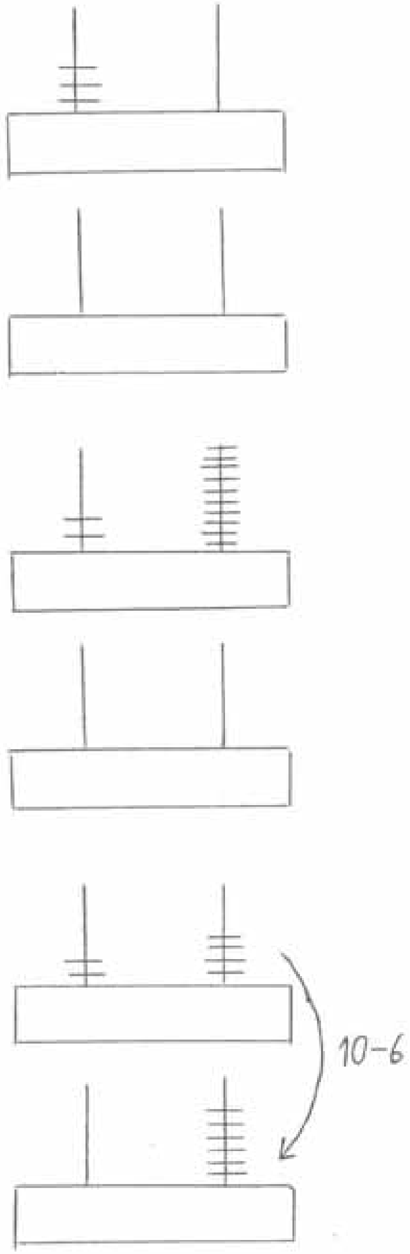
zermos tirar aqueles seis que colocamos?
Tiramos uma das dezenas, trocamos ela por dez que colocamos na coluna das unidades. Dessas dez tiramos as seis e ainda sobram quatro nessa coluna.

Depois que essa subtração foi feita no ábaco, armei o algoritmo na lousa e operei utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo.

$$\begin{array}{r} 30 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{2}\ {}^{10} \\ \cancel{3}0 \\ -\ 6 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} {}^{2}\ {}^{10} \\ \cancel{3}0 \\ -\ 6 \\ \hline 24 \end{array}$$

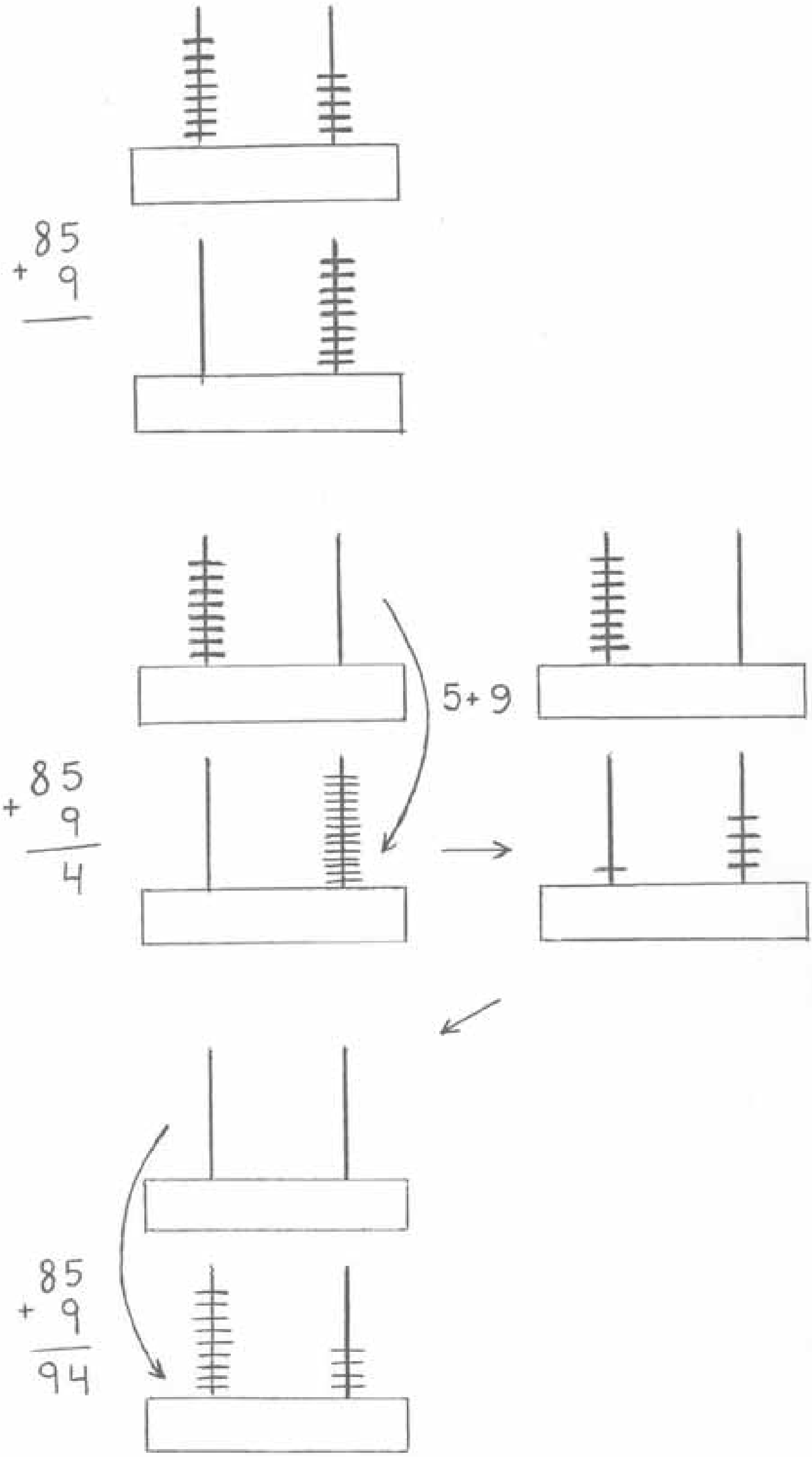


A seguir, darei uma lista de algumas adições e subtrações que foram realizadas com os educandos nesse Passo:

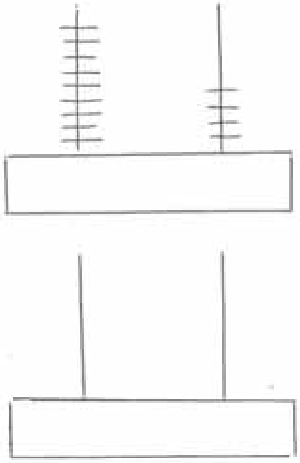
1) 62 + 8 ; 70 - 8	2) 57 + 6 ; 63 - 6
3) 85 + 9 ; 94 - 9	4) 48 + 25 ; 73 - 25
5) 647 + 185 ; 832 - 185	6) 537 + 98 ; 635 - 98
7) 73 + 49 ; 122 - 49	8) 303 + 59 ; 362 - 59
9) 1.847 + 409 ; 2.256 - 409	10) 125 + 67 ; 192 - 67
11) 58 + 67 ; 125 - 67	12) 307 + 854 ; 1.161 - 854
13) 235 + 907 ; 1.142 - 907	

Vejamos, por exemplo, o exercício nº 3 dessa lista: 85 + 9 e 94 - 9.

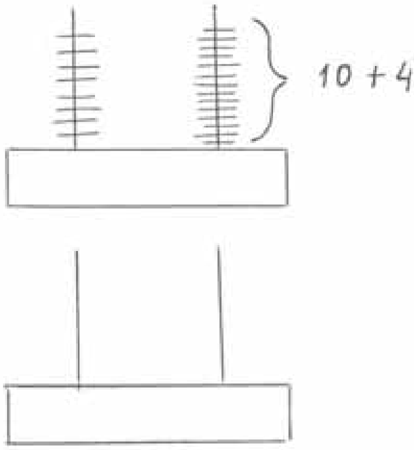
(Ver figura na próxima página).


85
+ 9
85
+ 9
4
5+9
85
+ 9
94

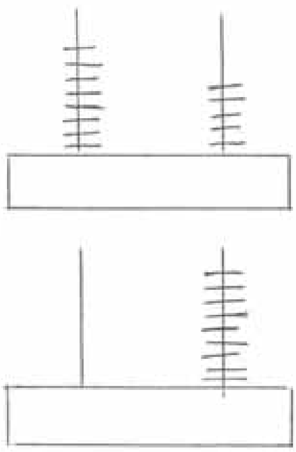
$$\begin{array}{r} 94 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8}\ {\scriptstyle 10} \\ \cancel{9}4 \\ -\ 9 \\ \hline \end{array}$$



$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 8}\ {\scriptstyle 10} \\ \cancel{9}4 \\ -\ 9 \\ \hline 85 \end{array}$$



A importância dos pequenos números colocados acima do algoritmo está no fato de que ali, assim como no ábaco, estão exteriorizados os raciocínios implícitos na resolução da conta. Existe entre algumas pessoas o preconceito de que colocar esses números acima da conta é sinal de pouca inteligência pois demonstraria que a pessoa não é capaz de guardar de memória. Considero esse preconceito muito prejudicial pois aqueles números além de facilitarem a compreensão dos raciocínios implícitos no algoritmo, possibilitam ao educando a checagem de onde ele poderia ter errado na resolução da conta e possibilitam também uma certa segurança indispensável para quem está aprendendo.

QUINTO PASSO: Adição com Três ou Mais Parcelas
Subtração com "Empresta-Um" Indireto.

Neste Passo o objetivo principal foi a realização de certos tipos de adições e subtrações considerados difíceis. Os educandos não utilizaram o ábaco neste Passo, na medida em que o objetivo principal era o de treinar o máximo possível os procedimentos do cálculo escrito. No entanto, para não se perder de vista a compreensão desses procedimentos (após os educandos terem resolvido cada conta) eu a resolvia utilizando simultaneamente o ábaco, os dedos e o algoritmo escrito na lousa. A introdução de adições de três ou mais parcelas se deu da seguinte forma:

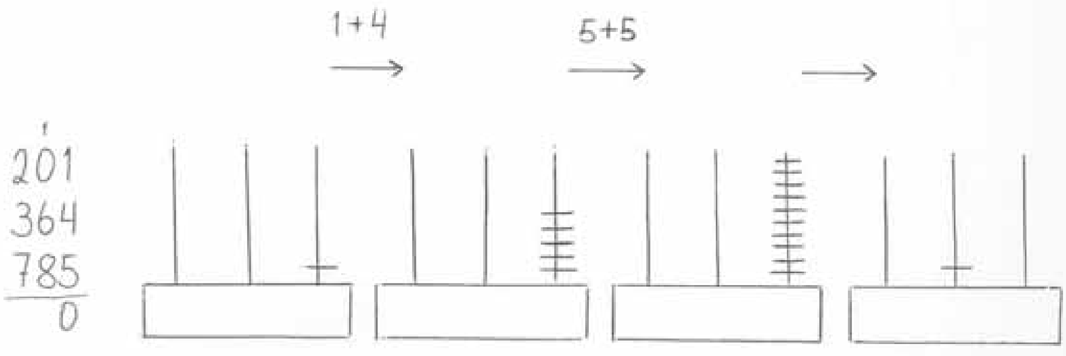
a) Escrevi, na lousa, na forma horizontal, a seguinte adição:

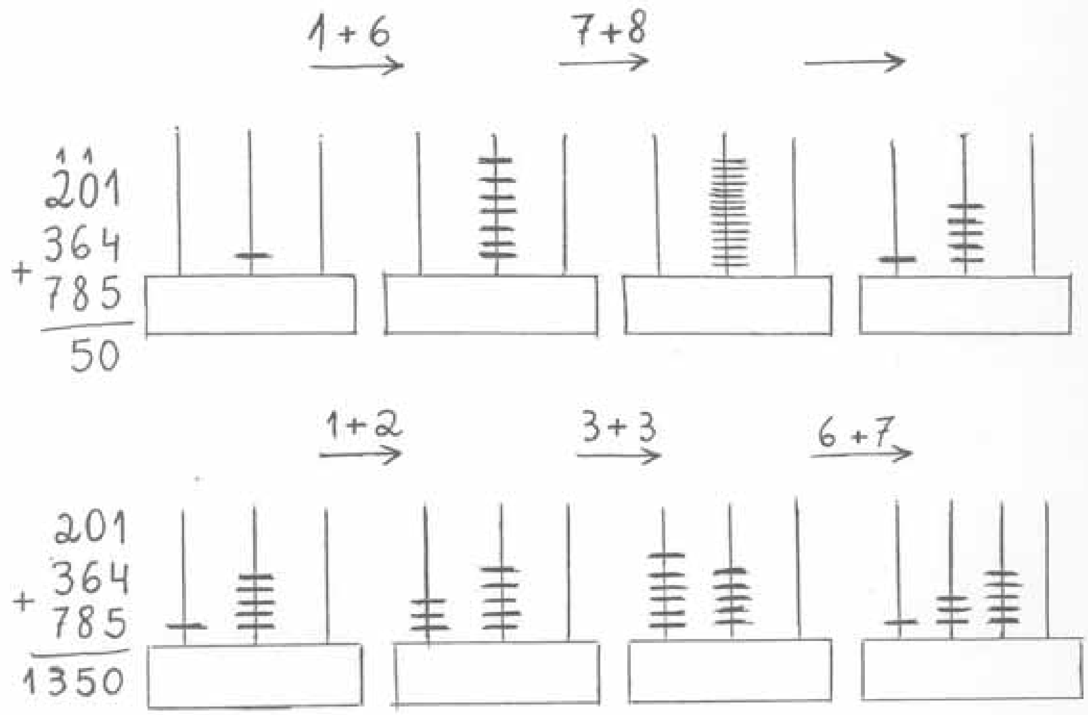
   201 + 364 + 785

b) Solicitei, então, que eles armassem a conta na forma vertical ("em pé") e a resolvessem. Devo esclarecer que quando solicito aos educandos que armem uma conta e a resolvam, fico percorrendo a sala para verificar como cada um está fazendo. Quando vejo que algum está fazendo algo errado, procuro formular perguntas que façam com que ele analise os passos do próprio raciocínio e verifique onde e porque errou.

Evito, ao máximo possível, dar a resposta ao educando, sem que ele tenha compreendido o que aconteceu. Às vezes, quando vejo que por diversos fatores (nervosismo, esquecimento, etc) algum dos educandos não consegue chegar à resposta certa a uma pergunta, então dou a resposta para ele não ficar na dúvida, mas procuro detalhar todos os passos que me levaram àquela resposta. Evidentemente que isso é preciso ser feito dentro do tempo disponível. Por vezes é necessário dar a resposta a algum educando que ficou mais para trás, sem que ele tenha compreendido totalmente o raciocínio realizado naquela questão específica, para não atrasar demais a programação. Depois, nos outros exercícios, procuro fazer com que esse educando compreenda o que ele não compreender no exercício anterior.

c) Após os educandos terem resolvido a conta, armei-a na lousa e resolvi-a utilizando simultaneamente um ábaco, os dedos e o algoritmo.





A seguir listarei algumas das adições, desse tipo, realizadas com os educandos:

1) 1.063 + 22 + 978

2) 15.047 + 67.898 + 8.175

3) 6.937 + 4.098 + 976

Quanto às subtrações deste Passo, iniciei-as da seguinte maneira:

a) Armei, na lousa, a seguinte subtração:

$$\begin{array}{r} 200 \\ - \;\; 27 \\ \hline \end{array}$$

b) Fui resolvendo essa subtração utilizando o ábaco, os dedos e o algoritmo e desenvolvendo, com os educandos, uma conversa semelhante à descrita abaixo:

- Dá para tirar sete da coluna das unidades?
  Não, ela está vazia.
- Para quem a unidade pede emprestado?
  Para a dezena, mas ela também está vazia.
- E para quem a dezena pede emprestado?

Para a centena.

- Quanto tem na coluna da centena?

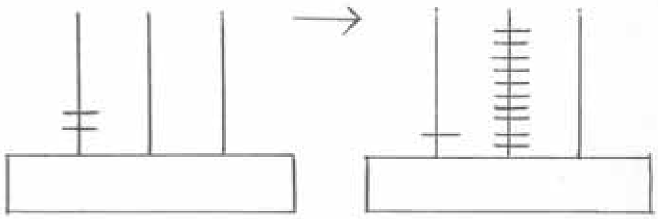
Duas.

- Se tirarmos uma das centenas, quantas teremos que co locar nas dezenas?

Dez.

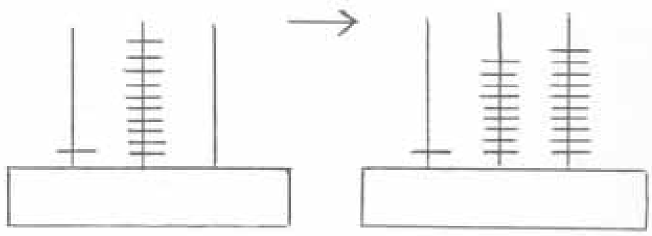
Fiz esse movimento no ábaco e no algoritmo.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 10\ \ } \\ \cancel{2}00 \\ -\ \ 27 \\ \hline \end{array}$$



- E agora? A dezena já pode emprestar para a unidade? Pode. É só tirar uma dezena e colocar dez bolinhas na coluna das unidades.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\ \ \ } \\ {\scriptstyle 1\ \cancel{10}\ 10} \\ \cancel{2}00 \\ -\ \ 27 \\ \hline \end{array}$$

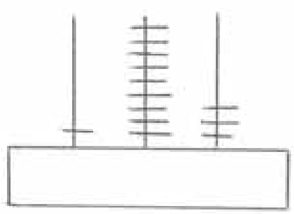


- Tirando sete das unidades, quanto sobra?

Três.

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 9\ \ \ } \\ {\scriptstyle 1\ \cancel{10}\ 10} \\ \cancel{2}00 \\ 27 \\ \hline 3 \end{array}$$

$\xrightarrow{10-7}$



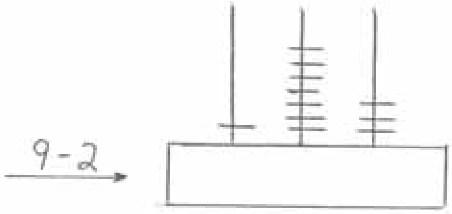
- Quanto temos na coluna das dezenas?

Nove.

- Tirando 2, quanto sobra?

Sete.

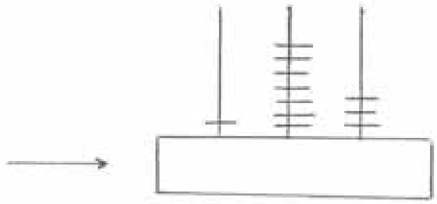
$$\begin{array}{r} \scriptstyle 9 \\ \scriptstyle 1\ \cancel{10}\ 10 \\ \cancel{2}00 \\ -\ 27 \\ \hline 73 \end{array}$$



- Quanto ficou na coluna das centenas?

Um.

$$\begin{array}{r} \scriptstyle 9 \\ \scriptstyle 1\ \cancel{10}\ 10 \\ \cancel{2}00 \\ -\ 27 \\ \hline 173 \end{array}$$



Listo, abaixo, algumas das subtrações desse tipo realizadas com os educandos:

1) 300 - 94

2) 600 - 148

3) 4.000 - 136

4) 6.000 - 231

5) 2.000 - 683

SEXTO PASSO: Tabuada da Adição (Memorização dos Fatos Básicos da Adição)

As adições do Quinto Passo (adições de várias parcelas), mostram que fica mais fácil de se calcular quando se conhece decor os fatos básicos da adição. O uso dos dedos pode ser um bom recurso para auxiliar nessa memorização, ao contrário do que muitos pensam. À medida que o educando vai adquirindo habilidade no cálculo através do uso dos dedos, isso vai tendo uma certa influência positiva no sentido da memorização dos fatos básicos da adição.

Para auxiliar ainda mais essa memorização, este Sexto Passo constitui-se no estudo da tabuada da adição.

Inicialmente fizemos essa tabuada usando a forma horizontal de escrita. Especial destaque foi dado tanto à tabuada do zero como ao fato de se iniciar toda tabuada com uma das parcelas sendo zero. Considero isso importante para dar continuidade àquele trabalho iniciado na Primeira Unidade, de levar o educando a superar a dificuldade inicial em trabalhar com o zero.

A seguir a tabuada da adição foi montada em uma tabela. Procurei fazer com que os educandos preenchessem essa tabela aleatoriamente, isto é, preenchendo o resultado de cada quadradinho sem seguir a ordem das colunas ou das linhas. A seguir apresento os dois modelos de tabuada de adição utilizados:

FORMA HORIZONTAL:

$0 + 0 = 0$ $\quad$ $1 + 0 = 1$ ..... $9 + 0 = 9$

$0 + 1 = 1$ $\quad$ $1 + 1 = 2$ ..... $9 + 1 = 10$

$0 + 2 = 2$ $\quad$ $1 + 2 = 3$ ..... $9 + 2 = 11$

$\vdots$ $\quad$ $\vdots$ $\quad$ $\vdots$

$0 + 9 = 9$ $\quad$ $1 + 9 = 10$ .... $9 + 9 = 18$

TABELA:

+	0	1	2	...
0	0	1	2	
1	1	2	3	
2	2	3	4	
⋮				

SÉTIMO PASSO:

O Sétimo Passo seria a passagem da Segunda para a Terceira Unidade, através da realização de adições de parcelas iguais. Exemplo:

$$\begin{array}{r} 120 \\ 120 \\ 120 \\ \underline{120} \\ 480 \end{array} +$$

A seguir analisarei alguns aspectos da dimensão política intrínseca a esses passos dessa Segunda Unidade.

IV - A DIMENSÃO POLÍTICA INTRÍNSECA

O ensino da adição e da subtração foi realizado nessa Segunda Unidade como um desenvolvimento de um processo que teve seu início na Unidade precedente. Dois relacionamentos foram acentuados: o relacionamento entre a Primeira e a Segunda Unidade (entre um estágio e outro de um processo) e o relacionamento entre as operações inversas (pólos opostos de um estágio do processo).

O que existe de político nessa posição metodológica?

Um grande obstáculo à criação de uma nova ordem social tem sido as concepções segundo as quais cada época histórica, cada forma de organização social, existe isoladamente das precedentes e das vindouras. Da mesma maneira, essas concepções consideram as diversas teorias criadas pelo homem, as várias áreas de conhecimento, as etapas pelas quais passa uma ciência no seu desenvolvimento, como isoladas uma das outras. Tal modo de encarar o mundo e o conhecimento humano não permite que se capte os reais fatores que geram as transformações de uma etapa histórica da sociedade em outra, de um conhecimento em outro, etc.

O movimento da realidade, assim como o movimento do conhecimento humano, não se dá pelo abandono de uma etapa e instauração de uma nova a partir do nada. Cada nova etapa, por mais que se constitua numa etapa essencialmente diferente da precedente, não surge do nada, mas surge de uma relação de fatores existentes naquela etapa precedente. A nova etapa supera e incorpora a anterior. A importância disso está na possibilidade do ser humano captar os relacionamentos existentes no interior de uma etapa que apontem para as possibilidades reais de criação de uma nova. Essa concepção do movimento da realidade e do processo de conhecimento humano determina uma base sólida para a prática social do indivíduo, enquanto ser social. Essa base constituir-se-á na captação do relacionamento de forças existentes na atual realidade social e na direção intencional de tais relações no sentido da criação de novas formas de organização da sociedade humana, a partir das condições existentes.

Através do relacionamento entre a Primeira e a Segunda Unidade procurei fazer com que essa concepção da dinâmica da realidade social fosse assimilada pelos educandos através do modo como eles foram apreendendo a Matemática. E isso não foi feito enxertando-se aspectos exteriores à Matemática. O conteúdo matemático contém essa dinâmica inerente a si mesmo. O que acontece é que muitas vezes transmite-se uma visão inadequada desse conteúdo, na medida em que a forma pela qual ele é transmitido-assimilado faz com que ele seja visto como que constituído de partes justapostas, dissociadas e estanques. Ao procurar transmitir o caráter de processo desse conteúdo, adotei uma postura pedagógica evidentemente política pois essa postura busca contribuir para a superação daquelas concepções que tanto têm se constituído em obstáculos à criação de novas formas de organização social.

Como disse Engels (1976, 22)

> *"A filosofia moderna alemã foi completada por Hegel, no qual, pela primeira vez (esse é seu grande mérito) se concebe o mundo da natureza, da história e do espírito, como um processo, isto é, como um mundo sujeito à constante mudança, transformações e desenvolvimento constante, procurando também destacar a íntima conexão que preside esse processo de desenvolvimento e mudança. Encarada sob esse aspecto, a história da humanidade já não se apresentava como um caos áspero de violências absurdas, (...) mas pelo contrário, se apresentava como o processo de desenvolvimento da própria humanidade, que incumbia ao pensamento a tarefa de seguir em suas etapas graduais e através de todos os desvios, até descobrir as leis internas, que regem tudo o que a primeira vista se pudesse apresentar como obra do acaso".*

E a lei da unidade e oposição dos contrários está presente no interior de todo ser, seja a realidade social, seja o processo de conhecimento humano, etc. Procurei traduzir isso através do relacionamento entre as operações de adição e subtração.

Não procurei, portanto, introduzir no ensino de Matemática algo de político que lhe fosse exterior, mas desenvolver os relacionamentos existentes no próprio conteúdo matemático, relacionamentos esses que são políticos pelo fato de desenvolverem um modo de agir e pensar que é necessário para a transformação social.

V - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

DANTZIG, Tobias - Número: A Linguagem da Ciência, Rio de Janeiro, Zahar, 1970.

DUARTE, Newton - "Recriando o Ábaco e o Sistema de Numeração" in Revista Educação e Sociedade nº 20, São Paulo, 1985.

DUARTE, Newton - O Compromisso Político do Educador no Ensino de Matemática, São Carlos, UFSCar (off-set) 1985.

ENGELS, Friedrich - Anti-Dühring, Paz e Terra, Rio de Janeiro, 1976.

HOGBEN, Lancelot - Maravilhas da Matemática - Influência e Função da Matemática nos Conhecimentos Humanos, Rio de Janeiro, Globo, 1946.

TAHAN, Malba - As Maravilhas da Matemática, Bloch, Rio de Janeiro, 1983.

ILUSTRAÇÕES: Francisco J.C. Mazzeu