

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Porque essa disciplina no programa de um futuro professor?

Introdução

Uma recomendação para se incluir a disciplina de História da Matemática nos programas de formação de professores dessa disciplina aparece em quase todos relatórios de comitês de estudo do ensino de matemática. Existe então um certo consenso da necessidade de tal estudo, mas é que não se sabe muito bem até hoje o que faria o futuro professor com tal curso e ainda mais qual seria o conteúdo desses cursos.

Existem duas publicações importantes que podem talvez nortear o professor para o uso da história nas aulas de matemática:

1. Historical Topics for Mathematics Classroom

AE Hallenbery NCTM 31 st Yearbook (1969).

2. Histoire des Mathématiques pour les collèges

CEDIC (1980) - Paris.

e varios artigos em revistas especializadas com sugestões de tópicos específicos. Quanto ao estudo das razões metodológicas de tal abordagem conheço somente dois artigos: de mesmo título

-Porque estudar história da matemática?

V. Byers

Int. J. Math. Ed. Sc. Tec. 1982 vol. 13 nº 1 59-66.

D.J. Shull

Tradução de Celso Machado e U. D'Ambrosio

História Técnica e de Tecnologia (org. Ruy Goma)

1. Princípio Genético

O princípio genético é fundamentado na lei de Haeckel de biologia que diz: "A ontogenia recapitula a filogenia".

ontogenia - desenvolvimento do indivíduo

filogenia - evolução histórica da espécie (Aurélien)

Transposto para o ensino, podemos citar G. Polya em "La découverte des Mathématiques" t. II pg 318.

"Quando se ensina um ramo da ciência (ou teoria, ou um conceito) devemos deixar a criança traçar nele as grandes etapas da evolução intelectual da raça humana. Bem entendido, não se coloca aqui de repetir em detalhes, os mil e um erros cometidos, mas unicamente as grandes etapas importantes".

Mais adiante Polya dá as fases do desenvolvimento de uma área científica:

Exploração: As primeiras ideias sugestivas, quase sempre incompletas e mesmo erradas, surgem de um contato com a experiência

Formalização: Os materiais são ordenados, uma terminologia apropriada é introduzida, as leis são descobertas.

Assimilação: Os conceitos, leis e teorias são colocados num contexto mais amplo, extendidos e aplicados".

Interpretar o princípio genético de um ponto de vista muito restrito, pode levar o professor a cometer erros grandes da educação. Ninguém jamais sugeriria que uma criança não poderia aprender o conceito do zero até que tivesse completado o estudo da geometria grega, na qual este conceito não aparece.

Então podemos dizer que "o princípio genético é um guia não um substitutivo de julgamento", e que a habilidade de uma criança para adquirir conhecimento matemático aumenta se sua apresentação é examinada a luz da aquisição histórica.

Há matemáticos como René Thom que defende o princípio genético. (AM. Scientist - 58 - 1971) e outros como Gratian Guinness defendendo a história no ensino de matemática somente para cursos superiores e que "um estágio inicial e especialmente na educação primária a história (de matemática) é bem inútil".

Diz ele que um conceito matemático quando divulgado, aparece numa ordem lógica (ordem epistemológica) que é o reverso da ordem histórica de seu descobrimento (ordem heurística) e num método de ensino essa ordem epistemológica facilita a compreensão (Int. J. Math Educ. Sci. Tech. - 1973 - Nº 4).

Compartilhamos entretanto da opinião de Byers e Struik que a escolha da ordem histórica como ordem ótima de instrução não é ou não deveria ser uma questão metodológica pré-estabelecida mas uma decisão educacional. Para tomar tal decisão é evidente que o professor terá que conhecer a história.

Segundo o princípio genético, o aluno deveria reproduzir a via seguida por aqueles que fizeram a descoberta.

Segundo o princípio de aprendizagem ativa, o aluno deverá descobrir ele mesmo, quando capaz.

Uma combinação destes dois princípios sugere que o estudante redescubra aquilo que ele deve aprender.

2. Motivação

Outro educador matemático Jones coloca a importância metodológica da história da educação matemática como resposta ao "porque". Os "porque de Jones são divididos em: cronológicos, lógicos e pedagógicos. (- The history of mathematics as a teaching tool - Historical Topics for Mathematics Classroom 1969.,

Visto neste ponto o uso da história se restringe a motivação. Não há dúvida que material anedótico e bibliográfico alimenta o ensino em classe, também humaniza e desmistifica a matemática. Qualquer estudante, que se depara com uma prova original de Euclides e ^{então} entra no espírito de uma época pode reviver suas descobertas e substituir a concepção de memorização tão comum no meio estudantil.

É tarefa do professor fornecer material que estimularia e direcionaria a imaginação dos seus alunos, esse material deveria reconstruir os processos de pensamento de determinados matemáticos na época em que viveram. Contudo o fornecimento de tal material não é uma tarefa fácil.

3. A História e o Professor

Há varios problemas para o professor que tente usar a história no processo de aprendizagem de matemática. Citemos quatro:

- (i) O conhecimento histórico pertinente é esparço.
- (ii) O processo de descoberta é normalmente não lógico e esse é apagado quando o trabalho é publicado.
- (iii) Falta de modelos de ensino adequado.
- (iv) Treinamento para professores.

(Byers).

A onda formalística da matemática que atinge seu apogeu na década de 50 com Bourbaki, é ainda hoje um enfoque dominante na formação dos professores. Esse processo formalista deixa de lado todo processo histórico de descobrimento. É natural então hoje que um professor com esta formação não estará apto para uso a história na classe de aula, quanto muito se restringindo a fatos anedóticos.

"O matemático é treinado para pensar mais sobre a precisão matemática sem uma dimensão temporal, isto é, pensar não historicamente. Com certeza é interessante conhecer como um evento histórico apareceu quando visto por um matemático do século XX. Mas é historicamente ruim confundir isto com que significou na época. Os historiadores se concentram no significado, no contexto histórico e nas relações históricas entre os eventos. Isto é igualmente interessante para o matemático que deseja conhecer como a matemática se desenvolveu realmente".

(May . What is good history and Who should do it? - Hist. Math - 2 1975).

4. Princípio unificador da matemática

Durante a primeira metade deste século os matemáticos acreditaram ter encontrado o elemento unificador da matemática - a teoria do conjunto. Acreditou-se então que com a teoria dos conjuntos teríamos uma coerência no ensino de matemática. Esses matemáticos liderados por Bourbaki tinham a esperança de ver as estruturas matemáticas se levantarem naturalmente a partir de uma hierarquia de conjunto.

Papy declarou então:

"Qualquer professor de matemática tem que começar reconhecendo um fato fundamental a matemática de hoje reconheceu a sua unidade, universalidade no conjunto" (Math Teacher - 1965 - 58).

Hoje nenhum matemático competente acredita neste fato pelo contrário como diz Wilder (Historical Topics for Math Classroom).

"O método axiomático por um tempo considerado a resposta para todos os problemas sobre fundamentos revelou ser o calcanhar de Aquiles na teoria lógica e de conjunto que ele supõe. Apesar de sua essência, ele é visto como fortemente dependente das particularidades lógica e de conjunto empregadas. Em nenhuma delas é uma coisa única".

Depois a teoria de categorias tentou também essa unificação, mas agora é geralmente aceito que uma sistematização final nunca será alcançada. É evidente entretanto que na análise final a unidade matemática está na sua história.

5. Revolução na matemática

Hankel 1869 - "Em muitas ciências uma geração destrói o que outra construiu e o que uma estabeleceu, outra desfaz. Na matemática exclusivamente cada geração constroa uma nova história para velhas estruturas (Boyer . História da Matemática).

Numa revolução uma entidade prévia existente (seja na constituição ou teoria) deve ser tombada e irrevogavelmente descartada. Na ciência, embora frequentemente desenvolvimentos importantes, chamados de revolucionários, não tem esta característica.

Podemos caracterizar os descobrimentos científicos em dois tipos: Transformacionais ou revolucionários - por exemplo astronomia de Ptolemeu para Copérnico e Formacionais onde novas áreas são formadas ou criadas sem derrubar as anteriores, podemos citar a geometria não euclidiana e a euclidiana.

matemática não é revelada por uma única "fórmula" por construção sucessiva. O que muda na matemática é a forma e se quisermos procurar ideias revolucionárias a criação é aí que vamos encontrar. Sua forma muda com o tempo, dando uma nova roupagem ao seu conteúdo e que propicia uma nova pesquisa na forma, e aí temos a evolução matemática.

"Novos resultados frequentemente tem-se tornado possíveis devido a nova moda de escrever. A introdução dos números Hindu-Arábicos é um exemplo; a notação de Leibniz para o cálculo é um outro exemplo. Uma notação adequada reflete melhor a realidade do que uma notação pobre, e como tal aparece dotada com uma vida própria que por sua vez cria nova vida".

(Sruik - 'A Concise History of Math - 1967).

Então mais do que o conteúdo, a forma toma um valor importante na educação matemática, essa não pode ser aprendida de uma só vez e depende também do contexto. O conceito de área pode ser visto de várias maneiras dependendo do contexto a que se quer estudar: (1) intuitivamente, (2) com fórmulas de medida (3) pela integral no cálculo e (4) via teoria da medida.

Aí entra a história para nortear um educador quando se transmitir este conceito.

6. Conclusão

Para concluir transcrevo um trecho do artigo de J. Grabiner - "The Mathematician, the Historian and the History of Mathematics" Hist. Matemática 2 (1975).

"Fundamentos históricos podem ajudar o professor de matemática de três maneiras: Primeiro, a história pode ajudar o professor a perceber dificuldades inerentes de certo conceito.

Um conceito que levou centenas de anos para ser desenvolvido é provavelmente difícil, e as dificuldades históricas podem bem assemelhar-se às dificuldades dos estudantes.

Segundo, compreendendo como uma idéia matemática curiosa, pode ajudar a motivação estudantil. Alguns exemplos: questões como "Porque deveria alguém pensar sobre isso de um modo particular". É claro que fatos históricos isolados não fazem história. O que a gente gostaria de fazer pelos nossos estudantes é o que interessa para os mesmos é dar um sentido de como o assunto é desenvolvido como um todo e de como isso esse assunto se encaixa.

Terceiro, a base histórica pode auxiliar os alunos, de matemática, a ver como a matemática se encaixa no resto da civilização humana; como Descartes e matemática se relacionam com o Descartes o filósofo. Ver a matemática do passado no seu contexto histórico ajuda a entender a matemática do presente no seu contexto filosófico, científico e social; e a ter uma melhor compreensão do lugar da matemática no mundo.

EDUARDO SEBASTIANI

INECC - UNICAMP

Al-umas Concepções filosóficas da Matemática Grega

Para entendermos um pouco da matemática de Euclides temos que nos colocar "dentro" da filosofia grega da época. Para isso, o que conheço de melhor é a introdução do livro "Elementos de Geometria" da obra completa de Euclides, publicado pela Universidade Nacional Autónoma do México (1944), onde na introdução J.L.G. Bacca nos coloca na época helênica e nos responde os "porques" que sempre aparecem quando lemos Euclides.

Vejamos alguns parâmetros que acho significativos para este entendimento:

Em primeiro lugar vejamos como os helênicos assumiam a verdade do ser. Esta verdade era propriedade do ser, o ser de cada coisa era uno, e conhecer é um identificar-se com este unitário ser das coisas, quando este ser se manifesta. Aplicando isto à geometria podemos afirmar que:

- a) os seres geométricos só podem ser de uma única maneira (verdade entitativa),
- b) o modo como os seres geométricos se manifesta também é único (verdade ôntica) e
- c) também se descreve estes seres geométricos de maneira única (verdade ontológica).

Com estas três verdades fazendo parte intrínseca do conhecimento grego, na matemática era impossível estudar as deformações, e a única transformação que aparecia era linear.

Esta postura de pensamento nos foi imposta até o século XVII quando Descartes e Leibniz com o racionalismo subjetivo na matemática nos dá uma outra maneira de descrever os entes geométricos, assim o ponto pode ser descrito pelas suas coordenadas, a reta e o plano por uma equação algébrica. Cai então a verdade ontológica, um mesmo ente geométrico pode ser descrito de várias maneiras. No século XIX com o início dos estudos de topologia, onde a deformação foi uma das características mais forte, cai a verdade ôntica, os seres geométricos podem se manifestar de várias maneiras. A reta se manifesta de diferentes maneiras em diferentes topologias e mesmo em diferentes geometrias.

Outra concepção importante para entendermos a matemática grega era a importância da luz. Conhecer em grego é sinônimo de iluminar. A luz ilumina o objeto, é iluminado, fica conhecido. Para os gregos a luz não reflete no objeto e impacta nossa retina, ela apenas vai ao objeto e o faz conhecer. Assim Euclides quando inicia suas definições o faz com negações, aquelas que não são iluminadas:

i- O ponto é o que não tem partes

ii- A reta tem longitude sem latitude

A primeira definição sem negação é o plano,

iii- Superfície é o que tem somente longitude e latitude.

Euclides não usa "sem profundidade", isto porque o único ser geométrico que pode ser iluminado é a superfície. Assim o corpo se chama em grego *σπερμα*, que significa não somente sólido, mas também "privado de(luz)". Um sólido não pode ser totalmente iluminado, vai ter sempre faces na sombra.

Fala-se muito da "agorafobia" do grego clássico, ou seja medo dos espaços vazios, do infinito e do indeterminado, que é um estado de espírito comum também nos nossos índios. Isto foi superado pela sociedade ocidental somente no renascimento, as primeiras características da quebra deste medo apareceu na pintura com a perspectiva.

Isso também afeta a obra de Euclides, assim o ponto e a reta tem nos Elementos a característica de objetos delimitadores, colocar extremos. O ponto e a reta possuíam a função de delimitar, por extremos, e além disso de fazer com que o objeto se torne visível.

O conceito de segmento de reta não existia na geometria grega, a reta que não possuía seus extremos estava em estado imperfeito. A mesma coisa se pode afirmar para a superfície. Toda figura é o circundado por um ou vários limites segundo a definição D.1.14 dos Elementos.

Após Euclides dar suas definições, que são em número de 25, ele dá os postulados em número de 5. Postular em grego significa pedir, e ele pede aos deuses que aquelas verdades se realizem para poder demonstrar seus teoremas, quase como um favor.

Depois de dar as definições e os postulados e antes de iniciar os teoremas Euclides enuncia 9 "noções comuns". A distinção entre postulado e noção comum foi apresentada por Proclo posteriormente. Os postulados são métodos para resolver problemas (e questões), e as noções comuns seriam métodos de demonstração (método de identidade imediata). Assim por exemplo o postulado IV- todos os ângulos retos são iguais entre si - o que deve ser usado para resolver problemas, na noção comum VIII diz que - o todo é maior que a parte - é uma noção de conhecimento imediato.

Vejamos alguns exemplos de demonstração euclideana para conceitos hoje tidos como algébricos:

TEOREMA I.4

" Se se corta arbitrariamente uma linha reta, o quadrado da linha inteira é igual aos quadrados das partes mais o dobro do retângulo compreendido pelas partes. "

Divida-se pois a linha reta AB pelo ponto arbitrário G.

Digo que o quadrado da reta AB é igual aos quadrados dos AG, GB mais o dobro do retângulo compreendido pelos AG, GB.

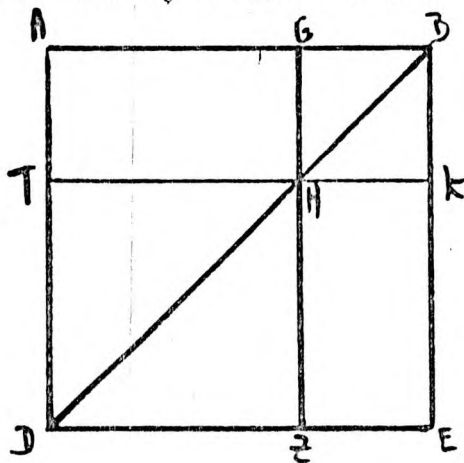
DEMONSTRAÇÃO:

Construa sobre a linha AB o quadrado ADEB e trace BD.

Pelo ponto G trace GZ paralela a cada uma das AD, EB e pelo ponto H trace HK paralela a cada uma das AB, DE.

Posto que GZ é paralela a AD e sobre ela incide BD, o ângulo externo GHB é igual ao interno e oposto ABD.

Mas também o ângulo ADB é igual a ABD, pois o lado BA é igual ao lado AD, pelo qual também serão iguais os ângulos GHB e HBG. Portanto o lado BG também é igual a GH.



Mas por uma parte GB é igual a HK e por outra os são GH e KB. Logo HK e KB são iguais.

Portanto o domínio GHKB é equilátero.

Digo também que é retângulo, pois GH é paralela a BK e sobre elas incide a reta GB, logo os ângulos KBG e HGB são retos.

Mas KBG é reto, de maneira que os ângulos opostos GHK e HKE também serão retos, logo GHKB é retângulo.

Mas se demonstrou que também era equilátero, logo é um quadrado, e além do mais está formado pela reta GL .

Por raciocínio parecido, TZ é um quadrado e está formado pela reta TH , quer dizer AG .

Portanto os quadrados TZ, KZ estão construídos sobre as retas AG, GB ; e posto que AH é igual a HE e HA está compreendido pelas retas AG, GB , pois HG é igual a GB , HE também será igual ao compreendido pelas retas AG, GL .

Portanto: os AH, HE são iguais ao dobro do compreendido pelas AG, GE .

Mas por outra parte os quadrados TZ, GK , estão construídos pelas retas AG, GB .

Mas os TZ, GK, AH, HE fazem o $ADEB$ inteiro, que é o quadrado construído sobre a reta AB .

Logo o quadrado construído sobre a reta AB é igual aos quadrados dos lados AG, GB , mas o dobro do retângulo compreendido pelos AG, BG .

Portanto, se se corta arbitrariamente uma linha reta, o quadrado da linha inteira é igual aos quadrados das partes, mas o dobro do retângulo compreendido pelas partes.

Que é o que se queria demonstrar.

CLIDES - "ELEMENTOS"

TEOREMA II.1

"Se dadas duas retas, se dividirmos uma delas em um número qualquer de partes, o retângulo compreendido por tais retas é igual aos retângulos compreendidos pela reta não dividida e por cada uma das retas parciais"

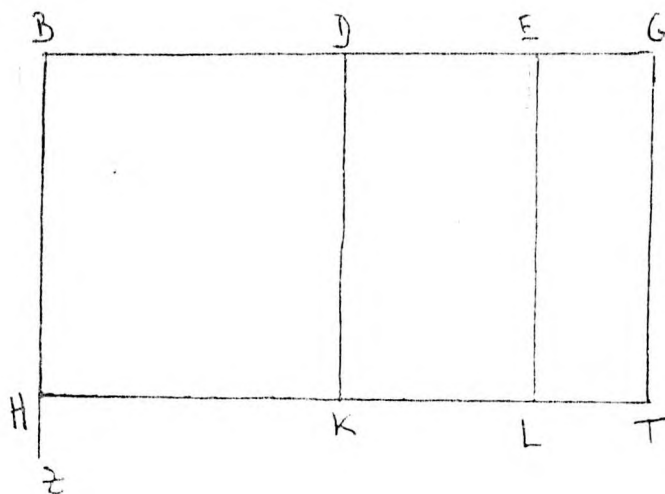
Sejam A, BG as duas retas e corte BG por dois pontos quaisquer D, E .

Digo que o retângulo compreendido pelas retas A, BG é igual ao compreendido pelas A, BD , mais o compreendido pelas A, DE , mais o pelas A, EG .

DEMONSTRAÇÃO:

Trace desde o ponto B a perpendicular BZ a BG , e ponha BH igual a A , e pelo ponto H trace HT paralela a BG ; e pelos pontos D, E, G traçam-se as retas DK, EL, GT paralelas a BH .

Desta forma o retângulo BT é igual aos retângulos BK, DL, ET .



Certamente BT é retângulo das retas A, BG , porque está compreendido pelas retas HB, BG , das quais BH é igual a A .

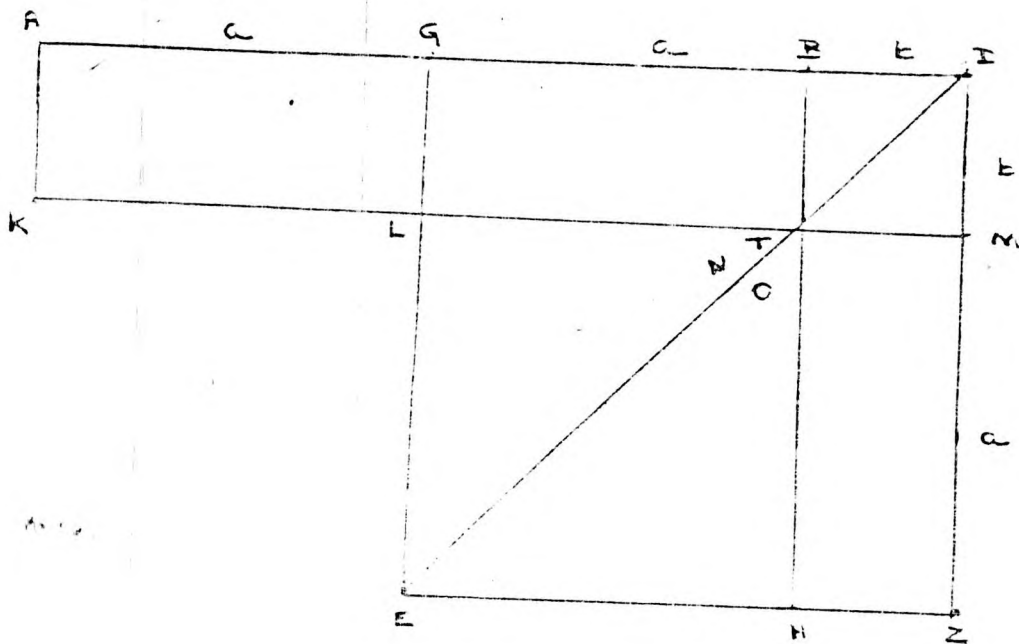
Por outro lado o retângulo BK é o das retas A, BD , porque está compreendido pelas retas HB, BD , das quais BH é igual a A .

Além do mais o BL é o das retas A, DE , pois DK é igual a BH , isto é, BH é igual a A .

Analogamente o ET é o das retas A, EG . Portanto o retângulo formado pelas retas A, BG é igual aos formados pelas A, BD , pelas A, DE e também pelas A, EG . Logo se dado as duas retas, se divide uma delas em um número qualquer de partes, o retângulo compreendido por tais retas é igual aos retângulos compreendidos pela reta não dividida e por cada uma de suas ~~partes~~ retas parciais.

Que é o que se queria demonstrar.

Se dividir uma linha reta em duas e se ajuntar uma reta qualquer, o retângulo compreendido pela reta inteira mais a ajuntada e pela ajuntada, junto com o quadrado da linha metade, é igual ao quadrado da linha composta da linha metade e a ajuntada.



Corta-se pelo ponto médio G de AB e ajunta-se a reta

BD

Digo que o retângulo AD, DB com o quadrado GB

é igual ao quadrado GD

$$(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$$

$$\alpha = a + b \quad \beta = a$$

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha^2$$

$$\text{ou } \alpha^2 - \beta^2 = (\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$$

Demonstração:

Controei-se o quadrado no $GD - GEZD$

Traça-se DE

Pelo ponto B traçar BH paralelo a EG e DZ

Por T traçar KM paralela a AB , e por A traçar AK paralela a GL .

Como AG é igual a GB , será também igual a AL e GT

Mas GT é igual a TZ . Mas AL é igual a TZ e tem em comum G e M .

AM inteiro será igual ao gnomô NXO

Mas AM está compreendido pelo AD, DB porque DB é igual a DM .

Logo o gnomô NXO será igual a AD, DB tendo em comum LH , que é o quadrado BG .

Logo o retângulo compreendido por AD e DB mais o quadrado BG é igual ao gnomô NXO e LH .

Mas o gnomô NXO e o LH fazem o quadrado $GEZD$ que é construído sobre o lado GD .

Logo o retângulo compreendido por AD e DB mais o quadrado BG é igual ao quadrado GD .