

DOC Nº 056

O desenvolvimento da compreensão
de igualdades

- Analúcia Dias Schliemann

O DESENVOLVIMENTO DA COMPREENSÃO DE IGUALDADES*

Analúcia Dias Schliemann,

Anna Paula de Avelar Brito Lima e Mônica Maria Lins Santiago

Mestrado em Psicologia da Universidade Federal de Pernambuco

Dentre os vários símbolos que a criança deve aprender na escola para resolver operações aritméticas por escrito, o sinal de igualdade (=) é provavelmente o que, do ponto de vista conceitual, provoca maiores dificuldades. Isto, no entanto, nem sempre é percebido pela professora.

Numa expressão aritmética como $3+2=5$ o sinal = indica tanto o resultado da operação de adição como o fato de que o primeiro termo da expressão ($3+2$) é quantitativamente idêntico ao segundo (5). Para a criança, no entanto, o sinal é frequentemente entendido apenas no primeiro sentido, sendo visto como um operador que transforma $3+2$ em 5. Mesmo quando, nos primeiros anos de escola, o sinal de igualdade é ensinado à criança ao lado dos sinais de comparação maior que ($>$) e menor que ($<$), seu sentido relacional parece permanecer isolado e independente de seu uso em expressões aritméticas como um operador.

A dificuldade com o sinal de igualdade reflete-se primeiramente na escrita errada de expressões para operações aritméticas sucessivas como $3+2=5+3=8...$ e, posteriormente, na dificuldade que a criança encontra ao lidar com expressões algébricas. Diferentemente da forma até então aceita para operar no domínio da Aritmética, ao ser iniciada na Álgebra a criança deverá lidar com o sinal de igualdade como relação e não como operador. As transformações a serem efetuadas têm como objetivo descobrir o valor das incógnitas. Para isso, desde que seja mantida a igualdade inicial, podem-se realizar operações que transformam tanto os valores conhecidos como as incógnitas. A manutenção de igualdades, quando transformações equivalentes são realizadas em ambos os termos de uma equação, é o princípio básico que permite que incógnitas ou valores conhecidos de um dos membros de uma equação possam ser transportados para o outro membro, desde que seu sinal seja trocado. Esta é uma das muitas regras que as crianças memorizam e utilizam na escola, sem compreender que isto é permitido porque o que se está realizando são transformações idênticas em ambos os termos, o que não altera a igualdade entre os mesmos.

As dificuldades enfrentadas pela criança para passar do pensamento aritmético para o pensamento algébrico têm sido objeto

* Este projeto contou com o apoio financeiro do INEP, sob forma de Auxílio à Pesquisa, e do CNPq, através da concessão de bolsas de Iniciação Científica. Nossos agradecimentos a essas instituições, a Cláudia Costa Dias pela participação na coleta e análise dos dados e a Peter Bryant pelas discussões durante o desenvolvimento do estudo.

de estudo de pesquisadores na área de Psicologia da Educação Matemática. Estes estudos têm tido como objetivo principal propor novas estratégias de ensino e avaliar seus efeitos (ver, por exemplo, Booth, 1987; Filloy, 1990; Filloy e Rojano, 1984; Kieran, 1981, 1985; Vergnaud e Cortes, 1986; Cortes, Kavafian e Vergnaud, 1990).

Kieran (1985), analisou os erros cometidos por estudantes na solução de equações. Os sujeitos de seu estudo eram iniciantes em álgebra ou intermediários com pelo menos um ano de estudo de álgebra. Seus resultados mostram, dentre os erros mais frequentes cometidos pelos dois grupos, a inversão da subtração com uma subtração (por exemplo, resolver $16x - 215 = 265$ subtraindo 215 de 265 ou resolver $37 - b = 18$ pela adição de 37 e 18) e a inversão de uma adição com uma adição (como resolver $30 = x + 7$ pela adição de $7 + 30$). A origem destes tipos de erros parece estar, justamente, numa compreensão falha das condições em que as igualdades são mantidas. A equação $30 = x + 7$ pode ser resolvida aplicando-se a regra "ao transferir um dos elementos da equação para o outro termo deve-se trocar seu sinal". Assim, a transformação $30 - 7 = x$ é correta. Mas esta regra é possível apenas porque a transformação obtida equivale a subtrair de cada termo da equação o mesmo valor, no caso 7. Assim tem-se como passo anterior, em geral desconhecido da criança, que $30 - 7 = x + 7 - 7$. Como $+7 - 7$ é igual a zero, obtém-se $30 - 7 = x$.

É possível que os erros encontrados por Kieran ocorram porque as regras são ensinadas na escola sem relacioná-las ao fato de que a igualdade se mantém se forem efetuadas transformações idênticas em ambos os seus termos. Assim, ao esquecer a regra, torna-se impossível para a criança reconstruí-la. Além disto, mesmo que a professora tenha ensinado a regra demonstrando sua origem, isto pode não ser compreendido pela criança porque, para ela, não é óbvio que, se existe uma igualdade, ela se manterá após as transformações.

A introdução ao ensino da álgebra deve considerar portanto, o nível de compreensão da criança sobre a manutenção de igualdades, para que as regras que possibilitam as transformações algébricas possam ser efetivamente aprendidas e compreendidas. Isto requer, por uma lado, a investigação sobre a evolução da compreensão de igualdades na criança e, por outro, a análise sistemática da eficácia de modelos didáticos passíveis de auxiliarem a criança a relacionar essa compreensão aos símbolos e regras formais da matemática. Estes dois tipos de investigação constituem os objetivos dos dois estudos relatados a seguir.

A descrição do desenvolvimento da compreensão da manutenção de igualdades, objetivo do primeiro estudo, foi feita através da análise das respostas de crianças a situações de equilíbrio em uma balança de dois pratos, avaliando-se (a) a compreensão do mecanismo de equilíbrio, (b) a descoberta dos valores de pesos em uma balança em equilíbrio com incógnitas em apenas um dos lados ou em ambos os lados, o que exige o cancelamento de incógnitas ou, em outras palavras, a manipulação de igualdades, e (c) as condições em que a criança admite que, estando a balança em equilíbrio, este será mantido se for retirado o mesmo valor de cada um dos pratos.

A investigação sobre um possível modelo didático para a introdução à álgebra foi o objetivo do segundo estudo, o qual analisou como a participação nas tarefas do primeiro estudo, que envolviam noções de álgebra em situação concreta de equilíbrio de uma balança de dois pratos, influenciava a compreensão e resolução de equações sob forma de exercícios escolares escritos, entre crianças de 5a. série, que tinham apenas noções elementares de álgebra, e crianças de 6a. série que já haviam recebido instrução escolar sobre álgebra.

A balança de dois pratos foi utilizada, entre outros, por Filloy e Rojano (1984), como situação didática, por Carraher e Schliemann (1987), para analisar a compreensão de igualdades e a manipulação de incógnitas entre feirantes que trabalham com balanças de pratos e por Vergnaud e Cortes, 1986 e Cortes, Kavafian e Vergnaud (1990), para analisar as dificuldades da criança ao resolver problemas de álgebra e o impacto de um programa de ensino. O seu uso como instrumento de pesquisa neste projeto não indica sua recomendação irrestrita como material para o ensino de álgebra, uma vez que este modelo apresenta limitações, especialmente no que se refere à noção de variáveis representadas em uma equação. Booth (1987) demonstra mesmo como, sob certas condições, o modelo não é corretamente compreendido pelos alunos. No entanto, como mostram os dados de Filloy e Rojano, 1984, Vergnaud e Cortes, 1986 e Cortes, Kavafian e Vergnaud, 1990, o equilíbrio em uma balança de dois pratos pode constituir uma situação adequada para promover a compreensão inicial de equações e das regras de manipulação algébrica.

ESTUDO 1:

Este primeiro estudo teve por objetivo analisar o desenvolvimento da compreensão de igualdades em situações de equilíbrio de uma balança de dois pratos. Através de três séries diferentes de tarefas analisou-se a compreensão da criança ao: (a) procurar obter o equilíbrio da balança, (b) descobrir o valor de incógnitas (saquinhos colocados na balança em equilíbrio) quando colocadas em apenas um dos pratos ou em ambos os pratos da balança e (c) analisar situações em que são retirados valores iguais de cada um dos pratos de uma balança em equilíbrio.

Método

Sujeitos

Foram entrevistadas 80 crianças, com idades de 5 a 12 anos, sendo 10 de cada idade, cursando do Jardim à 6a. série de uma escola particular da cidade do Recife.

Materiais

A balança de dois pratos serviu de instrumento para apresentação de situações de igualdade entre pesos e foi utilizada em todas as tarefas.

Procedimento

Quatro tarefas principais foram analisadas:

Tarefa 1:

Esta tarefa, composta por três situações, além de permitir analisar a habilidade da criança em equilibrar a balança, servia de introdução para que os sujeitos compreendessem o mecanismo da balança. Para cada situação iniciava-se com a balança vazia e colocava-se, em um dos seus pratos, um saquinho com cereais, o que a desequilibrava. Pesos de valores 1, 2 e 5 eram dados à criança para que ela tentasse reestabelecer o equilíbrio e dissesse quantos quilos tinha o saquinho. Simulava-se assim uma situação encontrada em mercados e feiras onde mercadorias a serem vendidas são pesadas. Os saquinhos, contendo farinha, arroz, massa de sopa ou feijão, foram confeccionados de forma a que pesassem tanto quanto cada um dos pesos utilizados. Assim foram obtidas as três situações que eram as seguintes:

(a) pesar um pacote de farinha cujo peso era equivalente ao peso onde estava indicado 1kg;

(b) pesar um pacote de massa de sopa de peso equivalente à combinação do peso onde estava indicado 1kg com o peso onde estava indicado 2kg;

(c) pesar um pacote de feijão de peso equivalente a 4kg, o qual, dispondo-se apenas de pesos de 1, 2 e 5kg, só poderia ser determinado por uma solução subtrativa semelhante àquela encontrada em feiras (ver Carraher e Schliemann, 1987, 1988), onde põe-se o peso de 1kg ao lado do pacote e o de 5kg no outro prato. Interessava neste caso analisar se, espontaneamente, a criança encontrava esta solução.

Tarefa 2:

Esta tarefa tinha por objetivo analisar a habilidade da criança para descobrir o valor de incógnitas (saquinhos colocados na balança em equilíbrio) quando colocados em apenas um dos pratos da balança (situações do tipo A) e a utilização do procedimento de cancelamento de incógnitas quando estas apareciam em ambos os pratos da balança (situações do tipo B). Nas nove situações desta tarefa a criança devia descobrir o peso de saquinhos de feijão, massa de sopa, ervilha, tapioca, sagu ou farinha, os quais estavam colocados em um ou em ambos os pratos da balança, ao lado de pesos com valores identificados, de forma que a balança estivesse em equilíbrio.

Nas situações de *tipo A* a balança era apresentada em equilíbrio com um ou dois saquinhos de valor desconhecido em apenas um dos pratos e pesos de valores conhecidos apareciam em ambos os pratos. Esquemáticamente, essas situações podem ser representadas como mostra a Figura 1.

Nas situações de *tipo B* as incógnitas, representadas por saquinhos iguais, de valor desconhecido, apareciam em ambos os pratos, ao lado de pesos com valores conhecidos. As cinco situações utilizadas encontram-se representadas esquematicamente

na Figura 2. Para cada uma delas, o valor de cada saquinho podia ser facilmente calculado se fossem eliminados valores desconhecidos iguais de ambos os pratos. A primeira situação (situação a) tinha por objetivo conhecer qual a estratégia naturalmente utilizada pela criança para esses casos. Na segunda situação (b), após a criança utilizar seus próprios métodos, o examinador demonstrava o procedimento de manipulação de incógnitas, e incentivava a criança a utilizá-lo. Em seguida outra situação era apresentada (situação c) e, caso a criança não adotasse o procedimento de manipulação de incógnitas para resolvê-la, o examinador sugeria sua utilização. Para as crianças de 11 e 12 anos, uma terceira e uma quarta situações (d, e), mais complexas, eram também apresentadas.

Tarefa 3:

Observações não sistemáticas durante o estudo piloto, realizado para definir as tarefas deste estudo, já haviam indicado que nem sempre parecia óbvio para as crianças entrevistadas que, se uma igualdade existe, a igualdade permanecerá ao serem retirados elementos de igual valor de cada um dos pratos da balança. A não compreensão deste fato torna impossível o uso das regras de manipulação algébrica com compreensão. Esta tarefa, também aplicada sob duas formas, A e B, buscou analisar a compreensão do fato de que uma igualdade se mantém se as quantidades retiradas de cada um dos seus termos são iguais. No caso da balança em equilíbrio, se a mesma quantidade for retirada de cada um dos pratos, o equilíbrio é mantido e a igualdade entre os pesos colocados nos dois pratos permanece. A análise dos resultados desta tarefa permitirá também esclarecer se a dificuldade encontrada pelas crianças em adotar o procedimento de manipulação de incógnitas estaria relacionada, ou não, a uma não compreensão das condições em que igualdades são mantidas.

Para analisar a evolução da compreensão da manutenção de igualdades foram utilizadas quatro situações onde a balança era apresentada em equilíbrio, perguntando-se à criança se o equilíbrio permaneceria caso fossem retirados valores iguais de cada um dos pratos. Após obter uma resposta o examinador pedia que a criança explicasse porque considerava que o equilíbrio seria ou não mantido.

Na forma A, as situações, com uma seta indicando os valores que seriam retirados, estão representadas na Figura 3.

Na primeira situação (situação a) todos os pesos colocados sobre os pratos da balança eram conhecidos. Assim, tinha-se a igualdade $2+1+1=1+3$ e perguntava-se se, ao retirar um peso de valor 1 de um lado e outro de valor 1 do outro, a balança ainda permanecia equilibrada.

Na situação b, desconhecia-se o valor do peso que seria retirado de cada prato da balança, mas conheciam-se os valores dos que ficavam. Assim a igualdade era $4+x=2+2+x$ e perguntava-se se a balança continuaria equilibrada se fossem retirados, um de cada prato, os saquinhos de peso desconhecido mas que se sabia serem iguais.

A terceira situação (c) incluía pesos conhecidos e desconhecidos de forma que, ao serem retirados pesos iguais dos dois pratos, em um dos pratos ficaria um peso conhecido e, no outro, um peso conhecido e outro desconhecido. A situação equivalia à equação $3+x=1+x+x$ e a questão era se a balança continuaria equilibrada se fossem retirados um saquinho de valor desconhecido x de cada prato.

Na situação d os pesos a serem retirados eram conhecidos e aqueles que permaneciam na balança eram todos desconhecidos. A equação que pode representar esta situação é $3+x=3+x+y$ e os valores a serem retirados são 3 em um lado e 3 em outro.

Na quinta e última situação (situação e) nenhum dos pesos eram conhecidos. Assim tinha-se $y+x=x+x+z$ e perguntava-se se o equilíbrio permaneceria se fossem retirados um saquinho de valor x de um lado e outro de igual valor do outro lado.

A forma B da Tarefa 3 era aplicada de modo semelhante à forma A e permitiu analisar em mais detalhe as condições em que a criança admite a permanência da igualdade ou a manutenção do equilíbrio. Quatro situações, em que todos os valores eram desconhecidos, foram apresentadas. Essas situações foram planejadas de forma a dificultar o cálculo dos valores desconhecidos, evitando-se assim que respostas e justificativas baseadas no cálculo dos valores que permaneciam na balança ocorressem. Apresentava-se à criança quatro situações distintas onde a balança estava em equilíbrio, com caixinhas de papel guache em ambos os pratos. As caixinhas da mesma cor tinham o mesmo peso e as caixinhas de cores diferentes tinham pesos diferentes. As caixas eram de tamanhos variados e o seu peso não tinha relação com o tamanho: caixas menores podiam ter peso maior que caixas maiores. Explicava-se à criança que, se as caixas tinham cores iguais, então seus pesos eram iguais e que, se tinham cores diferentes, os pesos também eram diferentes. Perguntava-se então se a balança continuaria equilibrada ou não, se fosse retirada, de cada um dos pratos, uma caixinha de determinada cor. Obtida uma resposta, pedia-se à criança que explicasse por que ela achava que o equilíbrio seria ou não mantido.

As duas primeiras situações incluíam igualdades que podem ser representadas como $x+x+y=x+z$, com todas as caixas de mesmo tamanho e a diferença de peso indicada apenas pelo uso de cores diferentes. A terceira situação incluía uma igualdade que também podia ser representada como $x+x+y=x+z$, mas onde o tamanho das caixas variavam e uma caixa de tamanho médio em um dos pratos tinha o mesmo peso que a soma dos pesos de duas outras caixas colocadas no outro prato, embora uma dessas duas caixas fosse muito maior que as demais. A quarta situação podia ser representada por $x+x+x+y=x+x+z$ e os tamanhos das caixas também variavam de forma que cinco caixas em um prato pesavam o mesmo que três caixas em outro. A representação de cada uma dessas situações encontra-se na Figura 4.

Resultados

Tarefa 1:

Nesta primeira tarefa a criança dispunha de pesos de valores 1, 2 e 5 e devia re-estabelecer o equilíbrio da balança que tinha em um dos pratos saquinhos de cereais de pesos desconhecidos. Como se pode constatar na Tabela 1, quando o valor do saquinho era 1 ou 3 e o equilíbrio podia ser diretamente conseguido colocando-se no outro prato da balança um dos pesos ou uma combinação de dois deles, quase todas as crianças conseguiram, sozinhas ou após intervenção do examinador, obter o equilíbrio. Quando porém o valor do saquinho era 4 e a única solução possível consistia em colocar, no prato onde estava o saquinho, o peso de valor 1 e, no outro prato, o peso de valor 5, o desempenho das crianças de 5 e 6 anos caiu drasticamente e a maioria delas não conseguiu estabelecer o equilíbrio, mesmo após sugestões do examinador no sentido de botar algum peso no prato onde estava o saquinho. As crianças de 7 até 10 anos conseguem obter o equilíbrio nesta situação mas somente após a sugestão do examinador. Apenas no grupo de 11/12 anos é que a solução é encontrada espontaneamente pela maioria das crianças.

Tarefa 2:

Como se pode observar na Tabela 2A, nas situações de *tipo A* da tarefa 2, onde a criança devia descobrir o peso de saquinhos de valor desconhecido que apareciam em apenas um dos pratos da balança, apenas as crianças de 5 e 6 anos apresentaram dificuldades. A partir dos 7 anos quase todas as crianças, espontaneamente, encontravam a resposta correta para as quatro situações.

As situações de *tipo B*, em que saquinhos iguais de valor desconhecido apareciam em ambos os pratos, ao lado de pesos com valores conhecidos, revelaram-se de tão difícil compreensão para as crianças de 5 e 6 anos, que este grupo não foi examinado nessas situações.

Para as demais crianças, ao ser apresentada a primeira situação (ver Tabela 2B, situação a), o procedimento escolhido por todas foi o cálculo aritmético, frequentemente combinado com um procedimento que pode ser chamado de teste de hipóteses. Neste caso, a criança escolhia um determinado valor e efetuava cálculos testando se, ao substituir todas as instâncias da incógnita pelo valor escolhido, obtinha o mesmo resultado para cada um dos dois pratos da balança.

Na situação b o examinador demonstrava o procedimento de manipulação de incógnitas e sugeria que a criança o utilizasse. Como mostra a distribuição dos dados, a maioria das crianças não aceitou utilizar o novo procedimento nesta situação, preferindo utilizar o cálculo aritmético.

Ao ser apresentada a situação c, o examinador aguardava a solução espontaneamente escolhida pela criança e, em seguida, caso não houvesse sido utilizada a manipulação de incógnitas, perguntava se ela não poderia resolver o problema utilizando o procedimento de manipulação de incógnitas que havia sido

demonstrado para a situação anterior. Os resultados para esta situação mostram que, apenas entre as crianças de 11 e 12 anos, houve a adoção espontânea da manipulação de incógnitas pela maioria dos sujeitos. As crianças de 7 a 10 anos, embora preferindo em alguns casos o cálculo aritmético, adotavam, após sugestão, a manipulação de incógnitas.

Para as situações d e e, aplicadas em seguida apenas às crianças de 11 e 12 anos, pelo menos 75% dos sujeitos utilizaram espontaneamente a manipulação de incógnitas.

Tarefa 3:

Os resultados obtidos com a forma A desta terceira tarefa encontram-se nas Tabelas 3A e 3Aj. A Tabela 3A mostra, para cada uma das cinco situações desta tarefa, quantas crianças acertaram imediatamente, quantas acertaram após ajuda do examinador e quantas erraram. A Tabela 3Aj mostra, para cada uma das situações, a frequência de cada tipo de justificativa apresentada pela criança para sua resposta. As justificativas foram classificadas em lógicas, empíricas e aleatórias ou erradas. As justificativas lógicas eram aquelas em que a criança enfatizava que as quantidades a serem retiradas eram iguais, as empíricas baseavam-se no fato de que as quantidades que ficariam na balança eram iguais e as aleatórias ou erradas eram justificativas do tipo "Não sei", "Porque é" ou "Um lado é mais pesado".

Na primeira situação, onde todos os pesos colocados sobre os pratos da balança eram conhecidos, tinha-se a igualdade $2+1+1=1+3$ e perguntava-se se, ao retirar um peso de valor 1 de um lado e outro de valor 1 do outro, a balança ainda permanecia equilibrada. Por ser muito fácil esta situação não foi apresentada às crianças de 11 e 12 anos. Os resultados mostram que metade das crianças de 5 e 6 anos e a grande maioria das de 7 a 10 anos imediatamente apresentavam uma resposta correta. Esta resposta correta, no entanto, como mostra a Tabela 3Aj, foi justificada, em 83.9% dos casos, de forma empírica, com a alegação de que a quantidade que permaneceria em um prato da balança ($2+1$) era igual ao valor no outro prato (3).

Na segunda situação a igualdade era $4+x=2+2+x$ e propunha-se retirar um x de cada lado. Os resultados nesta situação foram equivalentes aos da primeira situação e 87.5% das justificativas também referiam-se aos valores que ficavam na balança.

A terceira situação apresentava a igualdade $3+x=1+x+x$. Como nas situações anteriores, a partir dos 7 anos quase todas as crianças admitiram que a igualdade permaneceria após a retirada dos pesos iguais. Mas, neste caso, as crianças de 11 e 12 anos apresentaram justificativas diferentes das de menor idade: Até 10 anos, na maioria dos casos, elas apresentavam justificativas empíricas descobrindo o valor do peso desconhecido que ficava na balança e, como nas situações anteriores, justificando que a balança permaneceria igual porque o valor total que ficaria em um lado era igual ao valor no outro. As de 11 e 12 anos apresentavam justificativas lógicas, sem necessidade de calcular os valores que ficavam na balança e afirmando que, se os valores retirados eram iguais, o equilíbrio seria mantido.

Na quarta e última situação tinha-se a igualdade $y+x=x+x+z$. Os resultados nesta situação, tanto no que se refere a erros e acertos, como nos tipos de justificativa, foram equivalentes aos da terceira situação.

Os resultados nesta tarefa em sua forma B, analisados segundo os mesmos critérios utilizados para a forma A, encontram-se apresentados nas Tabelas 3B e 3Bj. As duas primeiras situações incluíam igualdades que poderiam ser representadas como $x+x+y=x+z$, sendo todas as caixas de mesmo tamanho. Os dados obtidos mostram uma clara evolução de idade para idade na resolução dessas situações constatando-se que aos 5 e 6 anos as respostas são, em geral, erradas. Aos 7 e 8 anos 50% das crianças dão respostas corretas imediatamente. Aos 9 e 10 anos esse percentual aumenta e, aos 11 e 12 anos, quase todas as crianças dão respostas imediatamente corretas. É também entre as crianças de 11 e 12 anos que as justificativas baseadas na lógica da situação aparecem com mais frequência e, sem necessidade de descobrir quais os possíveis valores para os objetos que ficam na balança, elas afirmam que, se a quantidade retirada de um prato é igual àquela retirada do outro, o equilíbrio tem que ser mantido.

Na terceira e quarta situações as igualdades podiam ser representadas, respectivamente, como $x+x+y=x+z$ e $x+x+x+y=x+x+z$. Mas, nestes casos, o tamanho das caixas variavam. Embora a mesma tendência evolutiva fosse encontrada, estas situações foram mais difíceis que as duas primeiras evidenciando uma influência do tamanho das caixas sobre o raciocínio da criança. e, ainda aos 11/12 anos, encontramos crianças que, mesmo sabendo que os pesos retirados eram iguais, acham que a balança ficará desequilibrada porque em um dos lados as caixas são maiores ou em maior quantidade que do outro.

A Manipulação de Incógnitas e a Compreensão da Manutenção de Igualdades

Constatadas as dificuldades da criança em adotar o procedimento de manipulação de incógnitas (tarefa 2B) e em admitir que uma igualdade se mantém se a mesma quantidade for retirada de ambos os termos da igualdade (tarefa 3B), resta examinar como estas duas habilidades estão inter-relacionadas. Seria de se esperar que apenas as crianças que conseguiram imediatamente concluir, em todas as tarefas do tipo 3, que a igualdade permanece se são retiradas quantidades iguais de cada um dos pratos da balança, seriam capazes de adotar e utilizar espontaneamente o procedimento de manipulação de incógnitas demonstrado pelo examinador na tarefa 2Bc e testado na tarefa 2Bd. A tabela 4 mostra a distribuição dos sujeitos de 7 a 12 anos nas tarefas 2Bb e 2Bc e na tarefa 3Bc, aquela onde foi mais difícil admitir que a igualdade permaneceria se fossem retirados valores iguais de cada prato. A distribuição obtida mostra que, independentemente do nível em que se classificaram na tarefa 3Bc, na tarefa 2Bb as crianças preferiam utilizar o cálculo aritmético para resolver o problema. Na tarefa 2Bc, no entanto, 14 crianças, quase metade daquelas que acertam imediatamente a tarefa 3Bc, utilizaram espontaneamente a manipulação de incógnitas, o que raramente acontece com as crianças classificadas nos outros dois níveis. Esta distribuição confirma a suposição de que apenas as crianças

que compreendem que uma igualdade permanece se são retiradas quantidades iguais de cada um dos seus termos seriam capazes de adotar e utilizar espontaneamente o procedimento de manipulação de incógnitas.

ESTUDO 2:

Método

O objetivo deste segundo estudo foi analisar como a participação nas tarefas do primeiro estudo, que envolviam noções de álgebra numa situação concreta (balança de dois pratos), influenciava a compreensão e resolução de expressões algébricas sob forma de exercícios escolares escritos. Esta análise permitirá avaliar a adequação da balança de dois pratos como modelo introdutório para o ensino de álgebra.

Sujeitos

Foram entrevistadas 20 crianças, com idades de 11 e 12 anos, sendo 10 de cada idade, as quais haviam sido submetidas às tarefas do Estudo 1. As crianças de 11 anos cursavam a 5a. série e as de 12 anos cursavam a 6a. série. Assim, as de 11 anos não haviam recebido ensino regular de álgebra e as de 12 anos já haviam recebido um ano de instrução regular sobre equações algébricas.

Material

Lápis, borracha e folha de papel contendo as seis equações abaixo, as quais correspondem, na ordem em que se encontram, às situações *c* e *d* da tarefa 2A e às situações *b*, *c*, *d* e *e* da Tarefa 2B do Estudo 1.

$$\begin{aligned} 2 + x &= 5 \\ 3 + 2x &= 5 \\ 5 + x &= 3 + 2x \\ 7 + x &= 3 + 2x \\ 5 + y &= 1 + y + x \\ 10 + y &= 8 + y + 2x \end{aligned}$$

Procedimento

Logo após resolver as tarefas do estudo 1, apresentava-se à criança uma folha de papel contendo as seis equações escritas, pedindo-se-lhe que descobrisse, para cada uma, qual era o valor de *x*. Após resolver cada equação, a criança explicava ao examinador como havia chegado àquela resposta. Quando a criança dizia não saber como descobrir o valor da incógnita, o examinador relacionava a situação escrita com a tarefa correspondente do Estudo 1, explicitando a relação entre a situação na balança e as equações escritas no papel.

Resultados

Para a análise desta tarefa as equações foram classificadas em três tipos. No primeiro tipo, representado pelas duas primeiras equações, existe apenas uma incógnita, a qual aparece em apenas um dos membros da equação. No segundo tipo, representado pelas duas equações seguintes, existe também apenas uma incógnita mas esta aparece nos dois membros da equação. Finalmente, no terceiro tipo, onde se classificam as duas últimas equações, existem duas incógnitas, uma em apenas um dos membros e a outra em ambos os membros.

A Tabela 5 mostra a distribuição dos sujeitos testados segundo a estratégia utilizada para descobrir o valor de x em cada uma das seis equações.

Para as duas equações do primeiro tipo, as quais contêm apenas uma incógnita que aparece em um dos seus membros, as estratégias de resolução utilizadas pelas crianças de 11 anos foram bem distintas daquelas utilizadas pelas de 12 anos. Entre as crianças de 11 anos, com exceção de uma criança ao resolver a segunda equação, a estratégia escolhida consistiu na utilização de regras aritméticas, com explicações do tipo: "O único número que somado com 2 dá 5 é 3". Já as crianças de 12 anos, também com uma única exceção, utilizaram regras algébricas para resolver as expressões, dando explicações como: "Os termos com a incógnita ficam no primeiro membro e os que não possuem incógnita ficam no segundo membro; quando muda de membro inverte-se o sinal". É interessante notar-se nestas explicações que as crianças de 11 anos, que ainda não haviam recebido instrução sobre álgebra, consideravam a expressão como um todo, associando a operação ao resultado, enquanto as crianças de 12 anos, que já conheciam as regras de manipulação algébrica, descreviam separada e mecanicamente as regras, não demonstrando uma preocupação com a compreensão da equação como um todo.

Para as duas expressões seguintes, onde existia também apenas uma incógnita, mas que aparecia nos dois membros da equação, a maioria das crianças de 11 anos não conseguiu descobrir o valor da incógnita por regras aritméticas. Entretanto, após o examinador relacionar a equação ao modelo da balança em equilíbrio, essas crianças imediatamente percebiam a semelhança entre as duas tarefas e, a partir de então, abandonavam os procedimentos aritméticos e resolviam a expressão como se estivessem atuando na balança, dando justificativas semelhantes às aquelas que haviam formulado para a tarefa 2. Com relação à manipulação de incógnitas, por exemplo, elas afirmavam que as incógnitas que apareciam em ambos os termos da equação podiam ser cortados porque tinham o mesmo valor e associavam esta ação à retirada dos saquinhos iguais na balança. Diferentemente, com exceção de um caso, as crianças de 12 anos resolviam as equações utilizando as regras algébricas e dando explicações semelhantes às que haviam dado às duas situações do primeiro tipo. Quando o examinador indagava o porquê de tais procedimentos, as crianças afirmavam que faziam desta maneira porque a professora havia ensinado assim.

Para as duas últimas equações, classificadas como de terceiro tipo, foi necessário novamente relacionar as expressões com o equilíbrio da balança, visto que apareciam agora duas variáveis distintas. As crianças de 11 anos percebiam a relação identificando cada y com saquinhos que podiam ser retirados por terem valores iguais e resolviam as expressões como se estivessem lidando com a balança. Para as crianças de 12 anos, apenas para este último tipo de equação foi necessário relacionar esta tarefa com a balança, visto que equações com duas incógnitas distintas não faziam ainda parte do aprendizado escolar destas crianças. Após a intervenção do examinador, demonstrando a relação entre a equação e a situação de equilíbrio na balança, as crianças de 12 anos recorriam ao uso da balança apenas no momento de cancelar a incógnita y que aparecia nos dois membros e, em seguida, continuavam a utilizar as regras algébricas, como nas equações anteriores.

É importante notar-se que nenhum dos sujeitos descobriu espontaneamente a relação entre as equações e a situação de equilíbrio na balança. As igualdades escritas e as igualdades na balança eram percebidas como tarefas distintas e somente após sugestão do examinador é que as crianças transferiam os procedimentos utilizados para descoberta da incógnita na balança para as equações.

DISCUSSÃO

A análise sistemática da evolução da compreensão de igualdades por parte da criança não constava até agora da literatura sobre o desenvolvimento cognitivo e constitui a primeira contribuição deste estudo. Constatamos que a criança, já aos 5 ou 6 anos de idade, compreende a situação de equilíbrio na balança se esta for do tipo mais simples em que, a uma quantidade identificável em um prato, corresponde uma quantidade identificável no outro. Dos 7 até os 10 anos esta compreensão desenvolve-se marcadamente levando a criança a conseguir descobrir, espontaneamente, através de procedimentos aritméticos de subtração ou adição de valores, o valor de incógnitas quando estas encontram-se em apenas um dos lados da igualdade, isto é em um dos pratos da balança. Quando as incógnitas aparecem em ambos os lados da igualdade, até os 10 anos de idade a criança prefere descobrir os valores por um procedimento de teste de possíveis valores. Com demonstração e sugestão do examinador ela pode utilizar um procedimento mais sofisticado de manipulação de incógnitas mas, ao que parece, este procedimento é adotado apenas como rotina pois não há uma compreensão clara de que, se existe uma igualdade, esta é mantida se quantidades iguais são subtraídas de ambos os seus termos, ou seja, de ambos os pratos da balança. A partir dos 11 anos, finalmente, o procedimento de manipulação de incógnitas pode ser adotado com compreensão. Os dados obtidos indicam que, de fato, apenas as crianças que compreendem que uma igualdade permanece se são retiradas quantidades iguais de cada um dos seus termos são capazes de adotar e utilizar espontaneamente o procedimento de manipulação de incógnitas.

A investigação sobre a adequação do uso da balança de dois pratos como modelo didático para a introdução ao ensino da Álgebra, objetivo do segundo estudo, mostrou que, para as crianças que desconheciam totalmente as regras de manipulação algébrica, o modelo é efetivo e auxilia a compreensão e utilização de procedimentos de manipulação de igualdades através do cancelamento de incógnitas que se encontram em ambos os termos de uma equação. Para as crianças que já conheciam as regras, o modelo mostrou-se ineficiente pois elas preferiam continuar a utilizar automaticamente os procedimentos aprendidos na escola, mesmo que não demonstrassem a compreensão adequada dos mesmos.

Este conjunto de resultados indica que atividades com a balança de dois pratos podem servir de base para o desenvolvimento da compreensão das regras de manipulação algébrica e que a formalização dessas regras somente deveria se dar após a criança demonstrar sua compreensão em situações não formalizadas, como é o caso do equilíbrio da balança. A formalização prematura parece levar à memorização e utilização mecânica das regras sem o necessário conhecimento conceitual que proporciona significado a essas regras.

Referências

- Booth, L. (1987). Equations revisited. Proceedings of the 11th International Conference Psychology of Mathematics Education. Montreal, 18-19 de julho.
- Carraher, T.N. e Schliemann, A.D. (1987). Manipulating equivalences in the market and in maths. Proceedings of the 11th International Conference Psychology of Mathematics Education. Montreal, 18-19 de julho.
- Carraher, T.N. e Schliemann, A.D. (1988). Álgebra na feira? Em T. Carraher, A. Schliemann & D. Carraher (Orgs.) Na Vida Dez, na Escola Zero. São Paulo, Cortez.
- Cortes, A., Kavaian, N. e Vergnaud, G. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. Proceedings of the 14th International Conference Psychology of Mathematics Education. Mexico.
- Filloy, E. (1990). PME Algebra research: A working perspective. Proceedings of the 14th International Conference Psychology of Mathematics Education. Mexico.
- Filloy, E. e Rojano, T. (1984). From an arithmetical to an algebraic thought. Proceedings of the 6th Annual Meeting Psychology of Mathematics Education - North American Chapter. Montreal, Canadá.
- Kieran, C. (1985). The equation-solving errors of novice and intermediate algebra students. Em L. Streefland (Org.) Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1, Noordwijkerhout, 141-146.
- Vergnaud, G. e Cortes, A. (1986). Introducing algebra to 'low-level' eighth and ninth graders. Proceedings of the 10th International Conference Psychology of Mathematics Education. Londres.

Figura 1: Representação esquemática das situações da tarefa 2A

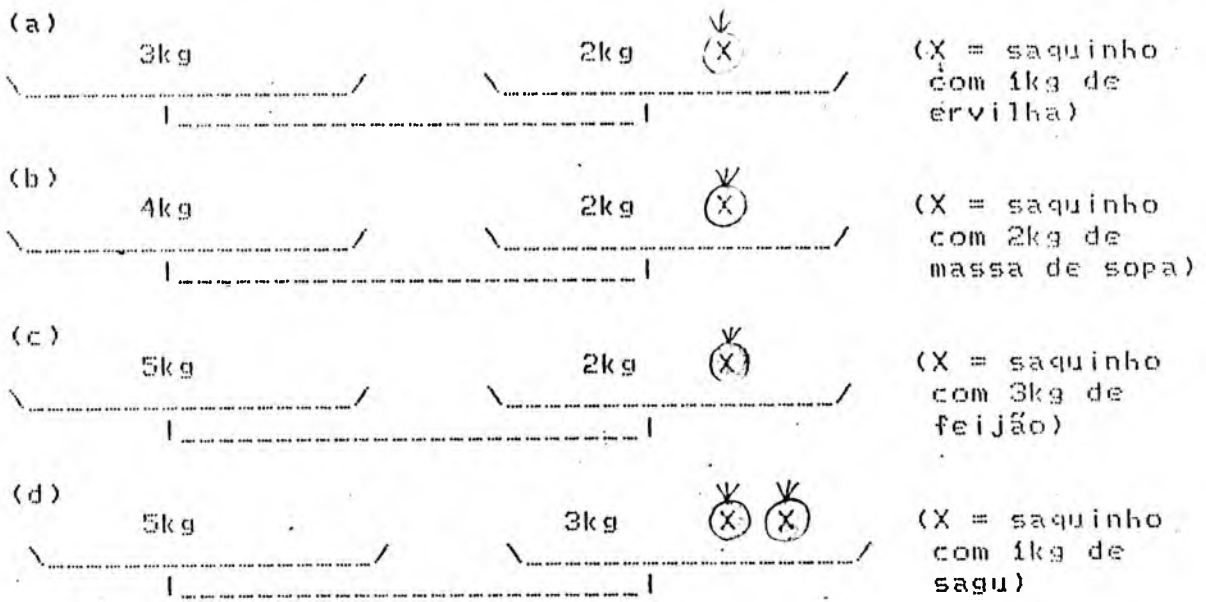


Figura 2: Representação esquemática das situações da tarefa 2B

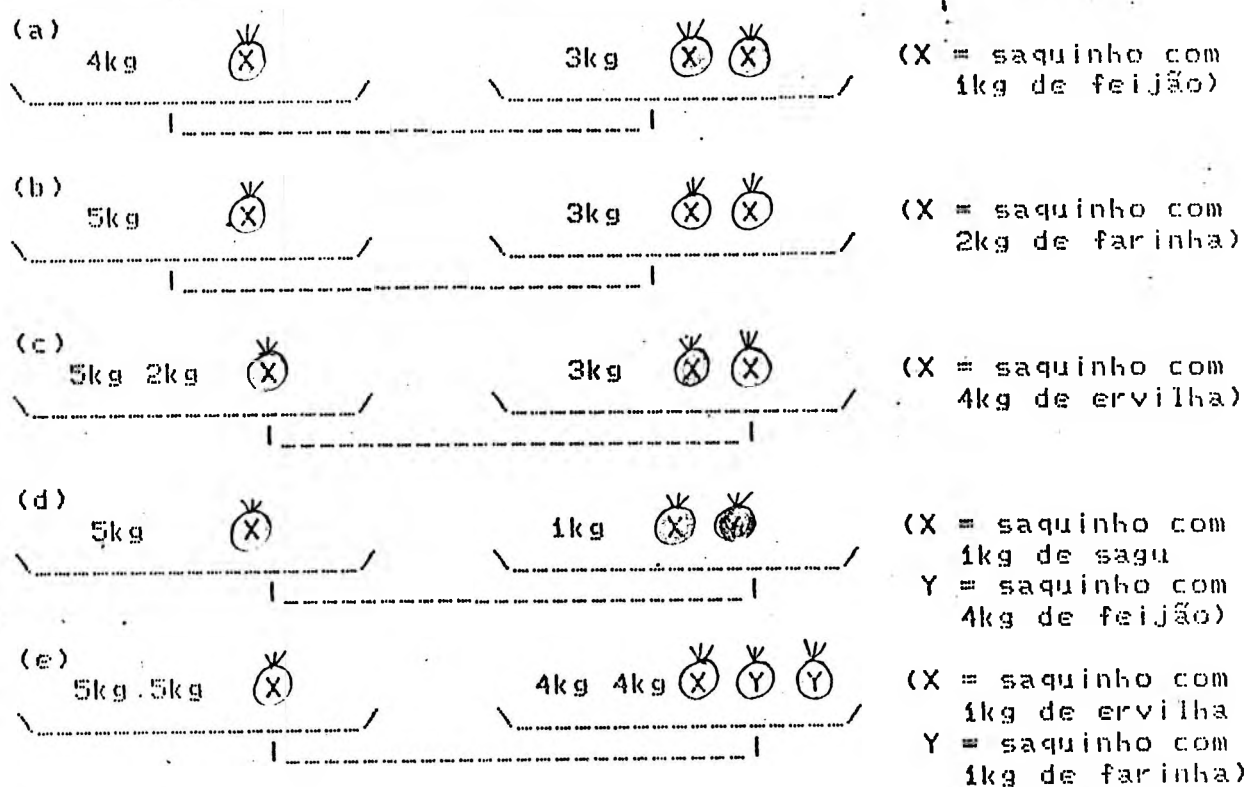


Figura 3: Representação esquemática das situações da tarefa 3A

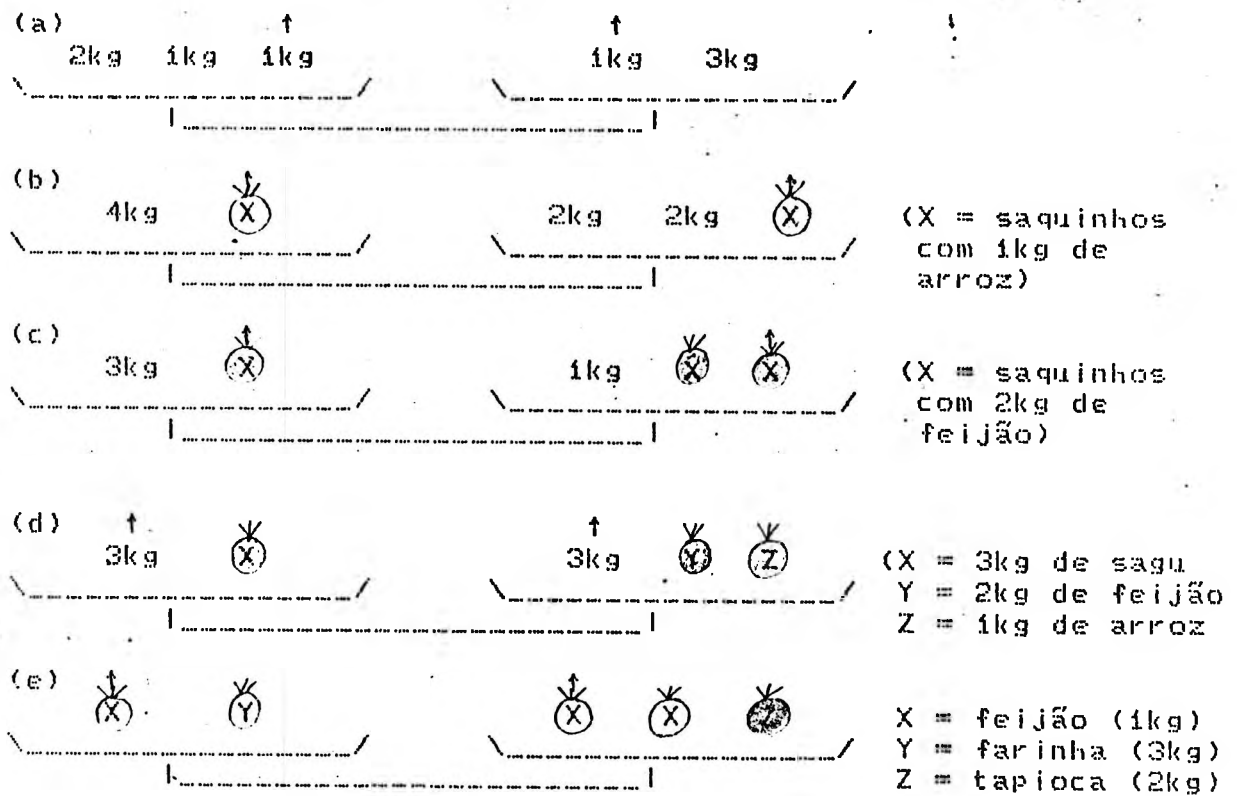


Figura 4: Representação esquemática das situações da tarefa 3B

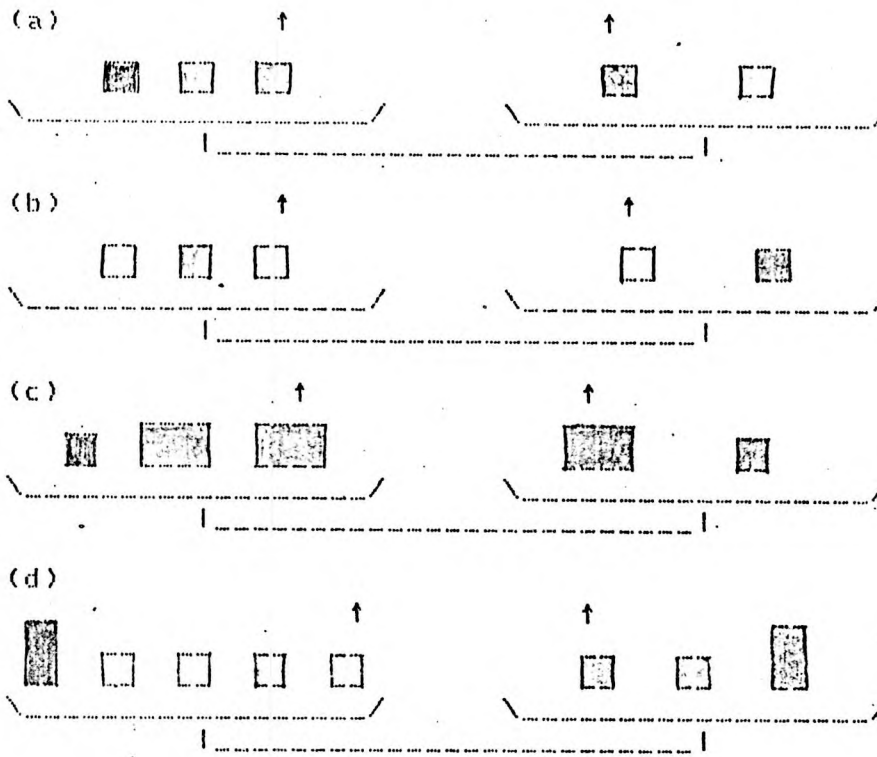


Tabela 1

Resultados em cada situação da tarefa 1

Situação a equilibrar usando pesos de valores 1, 2 e 5		Tipo de Resposta			
Solução	Idade dos Ss.	Acerto Imed. ou Tent. Esp.	Acerto após Sugestão do Examinador	Erro	
(a)					
1	5/ 6	18	2	0	
Colocar peso 1 no prato direito	7/ 8	19	1	0	
	9/10	20	0	0	
	11/12	20	0	0	
(b)					
3	5/ 6	5	13	2	
Colocar peso 2 e peso 1 no prato direito	7/ 8	9	10	1	
	9/10	14	6	0	
	11/12	20	0	0	
(c)					
4	5/ 6	1	4	15	
Colocar peso 1 no prato esquerdo e peso 5 no direito	7/ 8	0	16	4	
	9/10	3	17	0	
	11/12	12	8	0	

Tabela 2A

Resultados em cada situação do tipo A da tarefa 2

Situações para descoberta do valor da incógnita		Idade dos Ss	R e s p o s t a s		
			Acerto Imediato	Acerto após Tentativas ou Sugestão	Erro
(a)					
2	$\begin{smallmatrix} \vee \\ \otimes \end{smallmatrix}$	3	5/ 6	6	8
			7/ 8	17	1
			9/10	20	0
		11/12	Não avaliados		
(b)					
2	$\begin{smallmatrix} \vee \\ \otimes \end{smallmatrix}$	4	5/ 6	6	9
			7/ 8	18	0
			9/10	20	0
		11/12	Não avaliados		
(c)					
2	$\begin{smallmatrix} \vee \\ \otimes \end{smallmatrix}$	5	5/ 6	8	0
			7/ 8	19	0
			9/10	20	0
		11/12	20	0	0
(d)					
3	$\begin{smallmatrix} \vee & \vee \\ \otimes & \otimes \end{smallmatrix}$	5	5/ 6	5	4
			7/ 8	14	5
			9/10	20	0
		11/12	20	0	0

Tabela 2B

Resultados em cada situação do tipo B da tarefa 2

Situações para descoberta do valor da incógnita	R e s p o s t a s				
	Idade dos Ss	Manipulação de incógnitas		Cálculo aritmético	Erro
		Espon.	Ap. Sug.		
(a)					
4 	7/ 8	0	0	19	0
3 	9/10	0	0	20	0
	11/12	Não avaliados			
(b)					
5 	7/ 8	0	6	13	0
3 	9/10	0	3	17	0
Após uma demonstração sobre a manipulação de incógnitas	11/12	1	8	11	0
(c)					
5 2 	7/ 8	1	14	4	0
3 	9/10	2	10	8	0
Após sugestão sobre a manipulação de incógnitas	11/12	14	2	4	0
(d)					
5 	7/ 8	Não avaliadas			
1 	9/10	Não avaliadas			
	11/12	15	1	4	0
(e)					
5 5 	7/ 8	Não avaliados			
4 4 	9/10	Não avaliados			
	11/12	16	1	3	0

Tabela 3Aj: Justificativas para cada situação na tarefa 3A

Situações de equi- librio e pesos a retirar (↑)	Idade dos Ss	Tipo de Justificativa		
		Lógica (Tirou=)	Empírica (Ficou=)	Aleatória ou Errada
(a)	5/ 6	0	10	6
2 1 1 ↑ ↑ 1 3	7/ 8	1	19	0
	9/10	2	18	0
	11/12	Não avaliados		
	Total	3	47	6
(b)	5/ 6	0	10	6
4 ↑ ↑ ✕ ✕ 2 2	7/ 8	1	19	0
	9/10	0	20	0
	11/12	Não avaliados		
	Total	1	49	6
(c)	5/ 6	0	8	8
3 ↑ ↑ ✕ ✕ ✕ 1	7/ 8	1	15	4
	9/10	1	18	1
	11/12	13	5	2
	Total	15	46	15
(d)	5/ 6	1	7	7
✕ ↑ ↑ 3 3 ✕ ✕	7/ 8	1	15	4
	9/10	1	17	2
	11/12	13	6	1
	Total	16	45	14
(e)	5/ 6	1	7	8
✕ ↑ ↑ ✕ ✕ ✕ ✕	7/ 8	1	13	6
	9/10	3	17	0
	11/12	12	6	2
	Total	17	43	16

Tabela 3A

Resultados em cada situação da tarefa 3A

Situações de equilíbrio e pesos a retirar (↑)	Idade dos Ss	Tipo de Resposta		
		Acerto Imediato	Acerto após Tentativas ou Sugestão	Erro
(a) ↑ 2 1 1 ↑ 1 3	5/ 6	8	2	6
	7/ 8	17	3	0
	9/10	20	0	0
	11/12	Não avaliados		
	5/ 6	11	1	4
(b) ↑ 4 ↑ 2 2	7/ 8	20	0	0
	9/10	20	0	0
	11/12	Não avaliados		
	5/ 6	8	1	7
	7/ 8	18	0	2
(c) ↑ 3 ↑ 1	9/10	19	0	1
	11/12	17	1	2
	5/ 6	9	0	6
	7/ 8	15	1	4
	9/10	18	0	2
(d) ↑ 3 ↑ 3	11/12	18	1	1
	5/ 6	9	0	7
	7/ 8	15	1	4
	9/10	18	0	2
	11/12	18	1	1
(e) ↑ 3 ↑ 3	5/ 6	9	0	7
	7/ 8	15	1	4
	9/10	17	3	0
	11/12	17	1	2
	5/ 6	9	0	7

Tabela 3Aj: Justificativas para cada situação na tarefa 3A

Situações de equi- librio e pesos a retirar (†)	Idade dos Ss	Tipo de Justificativa		
		Lógica (Tirou=)	Empírica (Ficou=)	Aleatória ou Errada
(a)	5/ 6	0	10	6
↑ ↑ 2 1 1 1 3	7/ 8	1	19	0
	9/10	2	18	0
	11/12	Não avaliados		
	Total	3	47	6
(b)	5/ 6	0	10	6
4 ↑ ↑ ⊗ ⊗ 2 2	7/ 8	1	19	0
	9/10	0	20	0
	11/12	Não avaliados		
	Total	1	49	6
(c)	5/ 6	0	8	8
3 ↑ ↑ ⊗ ⊗ ⊗ 1	7/ 8	1	15	4
	9/10	1	18	1
	11/12	13	5	2
	Total	15	46	15
(d)	5/ 6	1	7	7
⊗ ↑ ↑ 3 3 ⊗ ⊗	7/ 8	1	15	4
	9/10	1	17	2
	11/12	13	6	1
	Total	16	45	14
(e)	5/ 6	1	7	8
⊗ ↑ ↑ (⊗) ⊗ ⊗ ⊗ ⊗	7/ 8	1	13	6
	9/10	3	17	0
	11/12	12	6	2
	Total	17	43	16

Tabela 3B

Resultados em cada situação da tarefa 3B

Situações de equi- líbrio e pesos a retirar (↑)	Idade dos Ss	Tipo de Resposta		
		Acerto Imediato	Acerto após Tentativas ou Sugestão	Erro
(a)				
↑ ↑ ■ □ □ ■ □	5/ 6	5	0	10
	7/ 8	10	5	5
	9/10	12	3	5
	11/12	17	1	2
(b)				
↑ ↑ □ □ □ □ □	5/ 6	2	2	11
	7/ 8	10	2	8
	9/10	14	2	4
	11/12	18	1	1
(c)				
↑ ↑ ■ □ □ □ □	5/ 6	2	1	12
	7/ 8	5	1	14
	9/10	12	0	8
	11/12	14	3	3
(d)				
↑ ↑ ■ □ □ □ □ □ □ □	5/ 6	4	2	9
	7/ 8	8	3	9
	9/10	14	3	3
	11/12	16	2	2

Tabela 3Bj: Justificativas para cada situação da tarefa 3B

Situações de equi- líbrio e pesos a retirar (f)	Idade dos Ss	Tipo de Justificativa		
		Lógica (Tirou=)	Empírica (Ficou=)	Aleatória ou Errada
(a)				
↑ ↑ ■ □ □ □ . □	5/ 6	1	2	12
	7/ 8	3	10	7
	9/10	1	14	5
	11/12	9	9	2
	Total	14	35	26
(b)				
↑ ↑ □ □ □ □ □	5/ 6	0	3	12
	7/ 8	3	7	10
	9/10	2	14	4
	11/12	11	7	2
	Total	16	31	28
(c)				
↑ ↑ ■ □ □ □ □	5/ 6	0	1	14
	7/ 8	1	4	15
	9/10	5	6	9
	11/12	10	7	3
	Total	16	18	41
(d)				
↑ ↑ ■ □ □ □ □ □ □ □	5/ 6	2	3	10
	7/ 8	3	6	11
	9/10	6	9	5
	11/12	15	3	2
	Total	26	21	28

Tabela 4

Distribuição dos sujeitos segundo as respostas na tarefa 2Bc e as estratégias utilizadas nas tarefas 2Bb e 2Bc

Respostas nas Tare- fas 2Bc	Estratégias na tarefa 2Bb				Estratégias na tarefa 2Bc			
	Man.	Man.	Calc.	Total	Man.	Man.	Calc.	Total
	Esp.	Sug.	Arit.		Esp.	Sug.	Arit.	
Acerto Imediato	1	10	20	31	14	11	6	31
Acerto após Tent. ou Sug.	0	1	3	4	1	0	3	4
Erro	0	6	18	24	2	15	7	24
Total	1	17	41	59	17	26	16	59

Nota: O total de sujeitos na tabela é de 59 porque uma criança não resolveu as situações tarefa 2Bb e 2Bc.

Tabela 5

Distribuição dos sujeitos segundo o tipo de procedimento para
resolução das expressões algébricas

Expressão	Idade	Cálculo Aritmético	Relação c/Balança	Cálculo Algébrico
$2 + x = 5$	11	10	-	-
	12	-	-	10
$3 + 2x = 5$	11	9	1	-
	12	-	1	9
$5 + x = 3 + 2x$	11	4	6	-
	12	-	1	9
$7 + x = 3 + 2x$	11	2	8	-
	12	-	1	9
$5 + y = 1 + y + x$	11	1	9	-
	12	-	3	7
$10 + y = 8 + y + 2x$	11	4	6	-
	12	-	2	8